

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES



GRADO EN ECONOMÍA

CURSO ACADÉMICO 2018-2019

**ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE SERIES FINANCIERAS Y
SU APLICACIÓN EN RIESGOS**

JULIO INCLÁN SÁNCHEZ

ALFONSA DENIA CUESTA

FUNDAMENTOS ANÁLISIS ECONÓMICO

Alicante, junio 2019

RESUMEN

Se ha elaborado un análisis de la estructura y dinámica de series financieras con el objetivo de obtener estimaciones de la volatilidad que permitan construir modelos de medición de riesgos óptimos. Respecto a la estructura de las series se ha profundizado en el estudio de la simetría con estadísticos robustos a datos atípicos y se ha comprobado su eficacia frente al estadístico estándar mediante experimentos Monte Carlo. Por otro lado, se ha modelizado la media y la varianza condicional de las series a través de procesos ARMA-GARCH que se han utilizado para el cálculo del VaR (Valor en Riesgo) y se ha llevado a cabo una evaluación predictiva comprobando que cuentan con buena precisión y son más eficientes en comparación a otros métodos de cálculo del VaR más sencillos. Concluyendo la adecuación de los modelos GARCH para el cálculo del VaR, aunque modelos que capturen la dinámica de los momentos de orden superior puedan ser más efectivos a la hora de hacer predicciones.

Palabras clave: Series financieras, medidas robustas de asimetría, volatilidad condicionada, VaR, Backtesting

ABSTRACT

An analysis of the structure and dynamics of financial series has been developed in order to obtain volatility estimations that allow the construction of optimal risk measurement models. Regarding the structure of the series, the study of the symmetry has been done with robust statistics and its efficiency against the standard statistic has been verified through Monte Carlo experiments. On the other hand, we have modeled the conditional mean and variance of the series using ARMA-GARCH processes that have been used for the calculation of the VaR (Value-at-Risk) and a Backtesting has been carried out, proving that they have good precision and are more efficient compared to other simpler VaR calculation methods. Concluding the adequacy of the GARCH models for the computation of VaR, although models that capture the dynamics of higher order moments can be more effective for forecasting purposes.

Keywords: Financial series, robust measure of skewness, conditional Volatility, VaR, Backtesting

ÍNDICE

1	<i>Introducción</i>	4
2	<i>Análisis estadístico</i>	5
2.1	Estadísticos descriptivos.....	5
2.2	Estimación robusta de la asimetría	7
2.2.1	Coeficientes y estadísticos de asimetría robustos.....	7
2.2.2	Simulación Monte Carlo.....	8
2.2.3	Aplicación de las medidas robustas a las series financieras.....	11
3	<i>Modelización de la media y varianza condicional</i>	14
3.1	Estacionariedad y dependencia temporal en la media	14
3.2	Estudio de la heterocedasticidad condicional.....	14
3.3	Modelos de Varianza Condicionada	16
3.3.1	Modelos GARCH y variantes.....	16
3.3.2	Distribución del término de error	17
3.3.3	Estimación de la media y varianza condicional	18
3.3.4	Evaluación de los modelos.....	18
4	<i>Value at Risk y Backtesting</i>	23
4.1	Value-at-Risk bajo modelos GARCH.....	23
4.2	Backtesting.....	26
5	<i>Estacionariedad y dependencia en la asimetría</i>	29
6	<i>Conclusión</i>	30
7	<i>Bibliografía</i>	32
8	<i>Anexos</i>	33

1 Introducción

El campo de la estadística y econometría aplicada al análisis financiero es uno de los que más ha avanzado en las últimas décadas debido a la motivación económica que hay detrás de esta área, que suscita el interés no solo de los académicos, sino de instituciones privadas como los grandes bancos y fondos de inversión a la hora de aplicar modelos de valoración de activos financieros cada vez más complejos y modelos de control de riesgos, conocidos como '*RiskMetrics*'. Estos modelos de valoración de riesgos han sido incorporados por agencias de rating, instituciones financieras privadas y los Bancos Centrales debido a requerimientos de capital impuestos por organismos reguladores como la SEC para garantizar la solvencia de los bancos.

Esta regulación ha ido cobrando mayor importancia, sobretodo tras la última crisis económica que puso de manifiesto la insuficiencia de los controles llevados a cabo hasta entonces, la inadecuación de las medidas de riesgo y la necesidad de una nueva normativa más estricta como Basilea III a la vez que unas medidas de riesgo más eficientes.

Para ello resulta indispensable utilizar modelos que capturen de forma óptima el comportamiento de las series financieras y estén basados en supuestos correctos. En este sentido, se ha puesto en entredicho algunos de los supuestos en los que se basaban modelos de valoración como el CAPM o Black-Scholes y modelos de gestión de riesgos que suponían que la rentabilidad de activos financieros sigue una distribución normal. Y numerosos estudios se han centrado en los momentos de orden superior de las series financieras al encontrar evidencia de un exceso de curtosis, véase Bollerslev (1987) y la presencia de asimetría en muchas series de rentabilidades, véase French et al. (1987).

Este trabajo pretende estudiar las características estadísticas relevantes de series financieras de distinta naturaleza con el fin de elaborar modelos que capturen la dinámica de estas series y aplicar estos modelos en la medición de riesgos.

Para ello, en una primera sección se elabora un análisis de estadística descriptiva de series financieras como índices bursátiles, materias primas y tipos de cambio; profundizando en el análisis de la asimetría de las series de rentabilidad mediante estimadores robustos, véase Kim and White (2004), y evaluando el mejor comportamiento de estos estimadores frente al estimador estándar de asimetría con la aplicación de experimentos Monte Carlo.

Posteriormente, se modeliza la media y la varianza condicional bajo modelos ARIMA y distintos modelos de la familia GARCH respectivamente. En la modelización de la

heterocedasticidad condicional se proponen distintas distribuciones de los errores en base a los contrastes de asimetría robustos.

Finalmente se utiliza como *RiskMetrics* el VaR en base a las estimaciones de la volatilidad mediante los distintos GARCH y se realiza un '*Backtesting*' para evaluar como los modelos GARCH consiguen una mejor medida del VaR que otros estimadores como la simulación histórica, la media móvil o la media móvil ponderada exponencialmente.

2 Análisis estadístico

2.1 Estadísticos descriptivos

En este trabajo se analizan series de rentabilidades de distinta naturaleza, en concreto se analizan los índices bursátiles: S&P 500, FTSE 100 e IBEX 35; los tipos de cambio: euro / dólar, dólar canadiense / dólar y libra / dólar; y las materias primas: petróleo, gas natural y oro.

Todo el análisis estadístico y econométrico que se presenta a continuación se ha realizado mediante el entorno y lenguaje de programación R.

Se han obtenido datos diarios del precio de cierre desde el 1 de enero de 2007 al 1 de febrero de 2019¹ y mediante la diferencia logarítmica se ha obtenido la rentabilidad diaria de dichas series.

Los gráficos de rentabilidad diaria se recogen en la Figura 8.1 del anexo y los estadísticos descriptivos principales de dichas series de rentabilidad se presentan en la Tabla 2.1, donde destacamos que el contraste Jarque-Bera rechaza la hipótesis nula de normalidad que se puede deber a que:

- Todas las series presentan un exceso de curtosis indicando una mayor probabilidad de valores extremos que en la distribución normal. Esta propiedad de colas gruesas es propia de las series de naturaleza financiera.
- Hay asimetría significativa al 5% en los índices bursátiles, en los tipos de cambio libra/dólar y dólar canadiense/dólar, y en las materias primas; siendo el tipo de cambio euro/dólar la única serie simétrica (aunque a un nivel de 10% de significatividad también es asimétrica).

¹ Los datos de precios diarios para los índices bursátiles y los tipos de cambio se han obtenido de *Yahoo Finance* y los datos de materias primas de *Quandl*.

Tabla 2.1 ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS RENTABILIDADES

	S&P 500	FTSE 100	IBEX 35
Sample size	3041	3054	3084
Mean	0.00021	0.00003	-0.00015
Median	0.00061	0.00034	0.00045
Min	-0.09470	-0.09265	-0.13185
Max	0.10957	0.09384	0.13484
5th percentil	-0.01982	-0.01854	-0.02450
95th percentil	0.01675	0.01737	0.02287
Stand. Dev.	0.01250	0.01191	0.01530
Skewness	-0.35395***	-0.12780***	-0.09279**
Excess Kurtosis	10.59943	7.83787	7.21065
Jarque-Bera (p-value)	14323 (0.00000)	7839.7 (0.00000)	6697.9 (0.00000)
	EUR/USD	GBP/USD	CAD/USD
Sample size	3154	3189	3190
Mean	-0.00004	-0.00013	-0.00004
Median	0.00007	0.00000	-0.00010
Min	-0.02781	-0.08402	-0.03244
Max	0.03733	0.03042	0.03879
5th percentil	-0.01001	-0.00937	-0.00974
95th percentil	0.00981	0.00924	0.00951
Stand. Dev.	0.00613	0.00610	0.00606
Skewness	0.08526*	-1.11000***	-0.08492**
Excess Kurtosis	2.32634	13.86073	3.09870
Jarque-Bera (p-value)	717.1 (0.00000)	26222 (0.00000)	1283.2 (0.00000)
	BRENT OIL	NATURAL GAS	GOLD
Sample size	3060	3062	3060
Mean	0.00002	-0.00023	0.00023
Median	0.00017	0.00000	0.00030
Min	-0.16832	-0.47561	-0.07696
Max	0.18130	0.52535	0.09338
5th percentil	-0.03502	-0.05477	-0.01728
95th percentil	0.03223	0.05380	0.01673
Stand. Dev.	0.02153	0.04203	0.01096
Skewness	0.14020***	0.69817***	-0.3294***
Excess Kurtosis	5.42964	26.25611	6.97496
Jarque-Bera (p-value)	3776.5 (0.00000)	88331 (0.00000)	6269.9 (0.00000)

Fuente: Elaboración propia

Significativo al 10%, **Significativo al 5%, *Significativo al 1%*

El coeficiente de asimetría estándar basado en el tercer momento centrado en torno la media, μ , y estandarizado viene dado por:

$$SK_1 = E \left(\frac{y_t - \mu}{\sigma} \right)^3$$

Y su versión muestral utilizada para el contraste de asimetría viene dada por el estadístico estándar:

$$\widehat{SK}_1 = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^3}{\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Donde $\sqrt{T}\widehat{SK}_1$ sigue una distribución aproximada $N(0, \frac{6}{r})$ bajo la hipótesis nula de normalidad.

El problema de los estadísticos estándares tanto para el cálculo de varianza, asimetría y curtosis es su alto grado de sensibilidad a observaciones atípicas al basar su cálculo en la media muestral, problema que se ve amplificado al elevar la medida a la potencia tercera para el cálculo de la asimetría y a la potencia cuarta para el cálculo de la curtosis. Por ello, la literatura financiera empieza a considerar medidas robustas a datos atípicos tanto para la medición de la asimetría como de la curtosis. Este trabajo va a tratar únicamente la medición robusta de la asimetría, aunque el posterior análisis sería extensible a la curtosis.

2.2 Estimación robusta de la asimetría

2.2.1 Coeficientes y estadísticos de asimetría robustos

Frente al coeficiente de asimetría basado en el momento de tercer orden, Yule (1911) y Bowley (1920) presentan coeficientes de asimetría basados en el primer y tercer cuartil, Q_1 y Q_3 , y en la mediana, M :

$$S_Y = \frac{\mu - M}{\sigma}, \quad S_B = \frac{Q_3 - 2M + Q_1}{Q_3 - Q_1},$$

Cuyas versiones muestrales son:

$$\widehat{S}_Y = \frac{\bar{y} - \text{median}(y_1 \dots y_t)}{\hat{\sigma}} \quad (2) \quad \widehat{S}_B = \frac{\bar{Q}_3 - 2\text{median}(y_1 \dots y_t) + \bar{Q}_1}{\bar{Q}_3 - \bar{Q}_1} \quad (3)$$

Estos estadísticos al basarse en cuantiles no se ven afectadas por datos atípicos, en especial el estimador de Bowley que estandariza la medida utilizando el rango intercuartílico en vez de la desviación típica, la cual puede estar influenciada por valores atípicos.

2.2.2 Simulación Monte Carlo

Para comparar qué medida nos da un resultado más fiable de la asimetría de una distribución y analizar el impacto de valores atípicos se aplica se simulan series pseudoaleatorias con distribuciones conocidas como son: la normal (0,1), la t de student con 5 grados de libertad y la chi-cuadrado con 8 grados de libertad. La elección de los grados de libertad para la t de student y la chi-cuadrado se ha realizado de forma arbitraria con la única voluntad de tener una serie con un exceso de curtosis propio de las series financieras y una serie con suficiente asimetría respectivamente.

Conocemos que las dos primeras distribuciones son simétricas y la tercera presenta una asimetría positiva, por tanto, el análisis se basa en comparar los resultados obtenidos simulando 1000 repeticiones de series con distinto tamaño muestral, T (50,500,1000,3000,5000) y calcular los coeficientes de asimetría estándar y robustos. Al aplicar Monte Carlo, las medidas de asimetrías que sean consistentes deben colapsar sobre los verdaderos valores de asimetría cuando $T \rightarrow \infty$. Mientras que en las series simétricas (la normal y la t de student) los estimadores deben colapsar en cero, en la χ_8^2 el estimador estándar de asimetría, el de Yule y el de Bowley deben colapsar en 1, 0.164 y 0.117 respectivamente².

La figura 2.1 muestra los diagramas de caja y bigotes de la distribución de las distintas medidas de asimetría para cada simulación. Se puede observar que todas colapsan sobre sus verdaderos valores; sin embargo, la dispersión en el estimador estándar es mucho más grande que para Yule y Bowley, sobretodo en muestras pequeñas.

A continuación, se repite el proceso anterior, pero introduciendo valores atípicos propios de las series de rentabilidad en estas simulaciones. Siguiendo un planteamiento similar al de Kim and White (2004), se introduce en las series aleatorias simuladas un único valor atípico proporcional a los que surgen en las series escogidas. Para ello, se ha utilizado la media de los valores mínimos de rentabilidad de los 3 índices bursátiles analizados y se ha dividido entre la media del primer cuartil de las mismas series, para posteriormente multiplicar el resultado por el Q_1 de las series simuladas tal que:

$$\text{Valor atípico ficticio} = (\text{Min}(rINDICES)/Q_1(rINDICES)) * Q_1(\text{series simuladas})$$

² Estos valores teóricos de asimetría donde deben colapsar los estadísticos estándar (1), de Yule (2) y de Bowley (3), provienen de las propiedades de las distribuciones seleccionadas. En el caso de la chi-cuadrado, el coeficiente estándar de asimetría viene determinado por $\gamma = 2\sqrt{2/n}$ donde n son los grados de libertad.

donde $Min(rINDICES)$ es la media aritmética del valor mínimo de las series: S&P 500, FTSE 100 e IBEX 35, y $Q_1(rINDICES)$ es la media aritmética del primer cuartil de estas mismas series.

La figura 2.2 muestra los diagramas de caja y bigotes del cálculo de las distintas medidas de asimetría para las distintas distribuciones una vez introducido el valor atípico. Se observa que, al introducir un solo valor atípico en las simulaciones de distribuciones simétricas, el estimador de asimetría estándar se mueve bruscamente de su verdadero valor de 0 para muestras de tamaño inferior a 1000 pero incluso para muestras grandes deja de ser consistente, mientras que el estimador de Yule se ve influenciado solo para muestras pequeñas ($n=50$) y el de Bowley no se ve influenciado por este valor atípico al depender completamente de cuantiles.

Figura 2.1 Distribución de medidas de asimetría en la simulación Monte Carlo sin observación atípica.

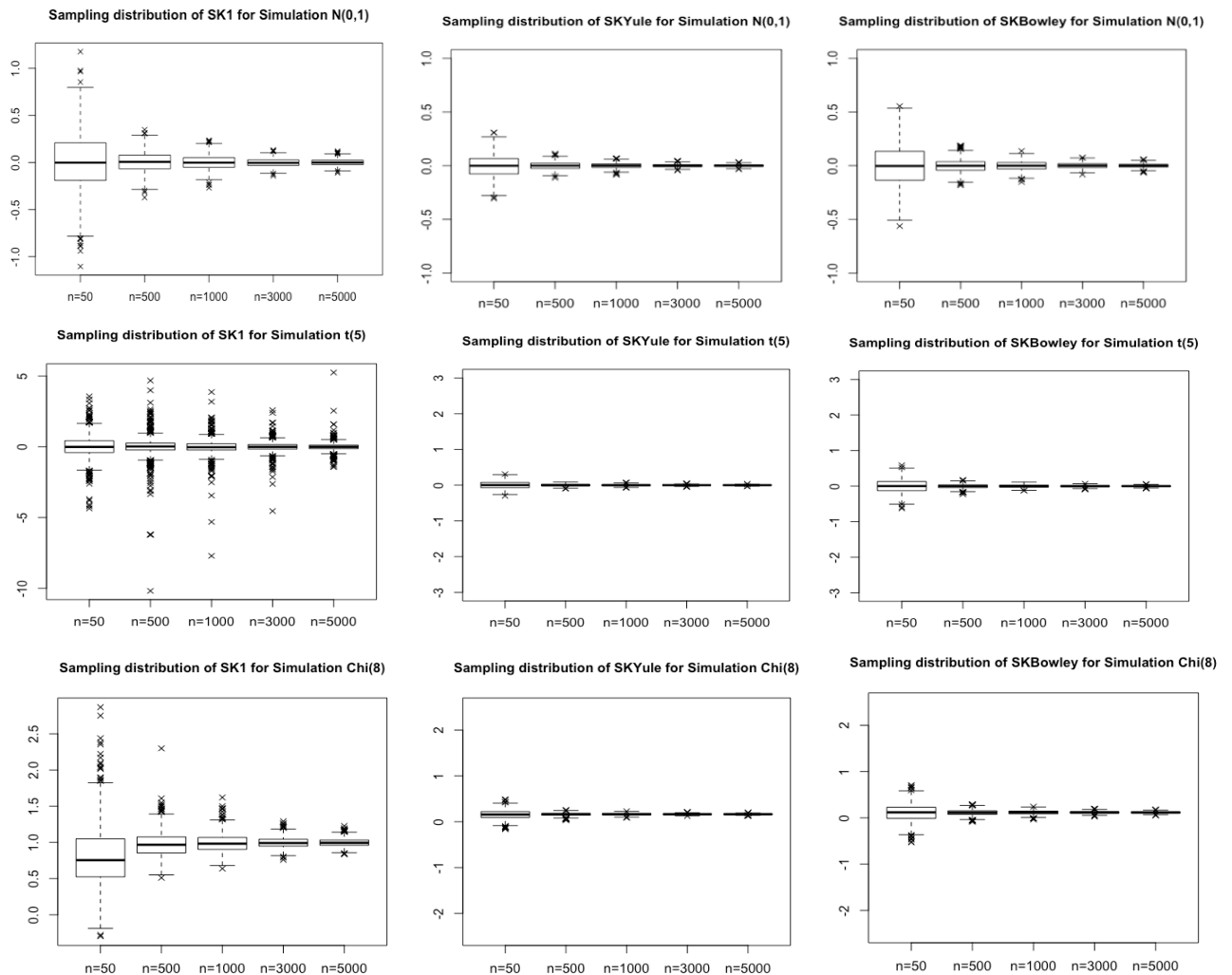
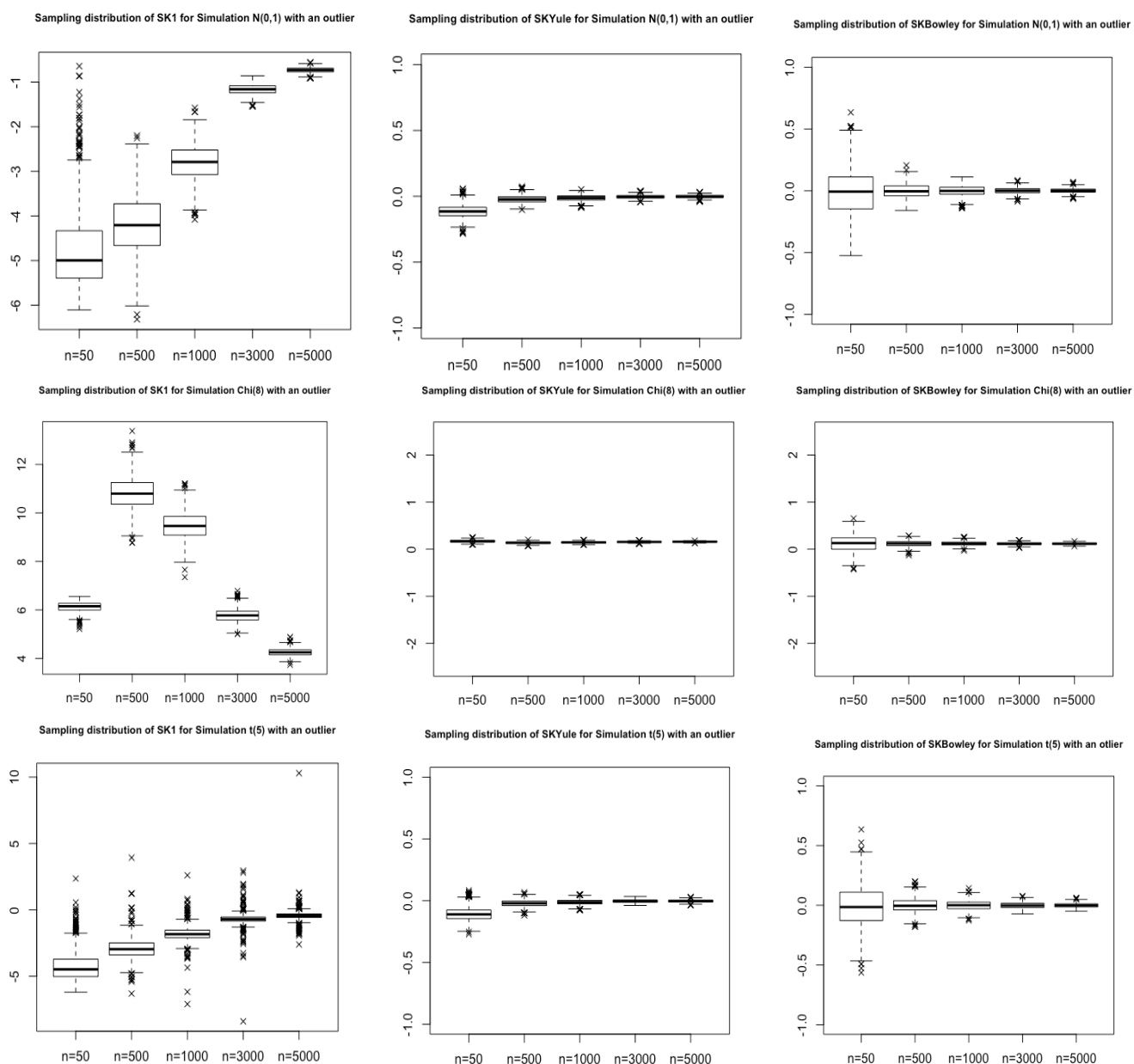


Figura 2.2 Distribución medidas de asimetría en la simulación Monte Carlo con observación atípica



Para analizar la validez del estimador estándar como estimador eficiente de la asimetría en las series financieras trabajadas, nos fijamos en las simulaciones de tamaño 3000 (similar al tamaño de las series financieras en las que se centra el trabajo). En la Tabla 2.2 se muestra la media de los coeficientes de asimetría calculados sobre las series simuladas, donde se observa que la introducción de un solo valor atípico altera drásticamente el estimador estándar de asimetría haciendo que series que son simétricas como la normal y la t de student, sean asimétricas según dicho estimador, mientras que los estimadores de Yule y Bowley no se ven afectados por este valor atípico y por tanto son más adecuados a la hora de estudiar la simetría de las series analizadas.

Tabla 2.2 Media de los coeficientes de asimetría de las series con tamaño 3000 simuladas

	Sin atípico			Con atípico		
	N(0,1)	T-5	Chi(8)	N(0,1)	T-5	Chi(8)
sk1	-0.0011	-0.0099	1.0257*	-1.1663***	-0.714***	5.7718***
skYule	-0.0008	-0.0006	0.1646***	-0.0044	-0.0041	0.1539***
skBowley	-0.0014	-0.0011	0.119***	0.0001	0.0002	0.1169***

*Se rechaza hipótesis nula de simetría al *10%, al**5% y al***1%*

Fuente: Elaboración propia

2.2.3 Aplicación de las medidas robustas a las series financieras

Con el apoyo teórico sobre el mejor comportamiento de los estimadores robustos respecto al estimador de asimetría estándar visto en el apartado anterior, se realiza un estudio de la asimetría de las series financieras utilizando los estimadores de asimetría de Yule y Bowley.

Este estudio incorpora dos contrastes de asimetría, uno para el estimador de Yule y otro para el de Bowley, propuestos por Cabilio and Masaro (1996) y Ngatchou-Wandji (2006) respectivamente, ya que el contraste estándar rechaza la hipótesis nula de que la distribución es simétrica, no solo cuando es asimétrica sino también cuando es simétrica pero no es normal. Los contrastes robustos no tienen este problema, aunque su inconveniente sea una potencia más reducida.

Cabilio and Masaro (1996) mostraron que el estimador de Yule es consistente y asintóticamente normal, en particular:

$$\sqrt{T}\widehat{S}_y \rightarrow N(0, \sigma^{-2}v^2)$$

$$\text{donde } v^2 = \sigma^2 + \frac{1}{4f^2(M)} - \frac{E|y_t - M|}{f(M)}$$

y Ekstrom et al. (2012) mostraron que el estimador de Bowley es consistente y asintóticamente normal, en particular:

$$\sqrt{T}(\widehat{Q}_3 - 2\widehat{M} + \widehat{Q}_1) \rightarrow N(0, \Theta^2)$$

$$\text{donde } \Theta^2 = \frac{0.25 \times 0.75}{f^2(\widehat{Q}_3)} + \frac{0.25 \times 0.75}{f^2(\widehat{Q}_1)} + \frac{1}{f^2(\widehat{M})} + \frac{2 \times 0.25^2}{f(\widehat{Q}_3) \times f(\widehat{Q}_1)} - \frac{2 \times 0.25}{f(\widehat{Q}_3) \times f(\widehat{M})} - \frac{2 \times 0.25}{f(\widehat{Q}_1) \times f(\widehat{M})}$$

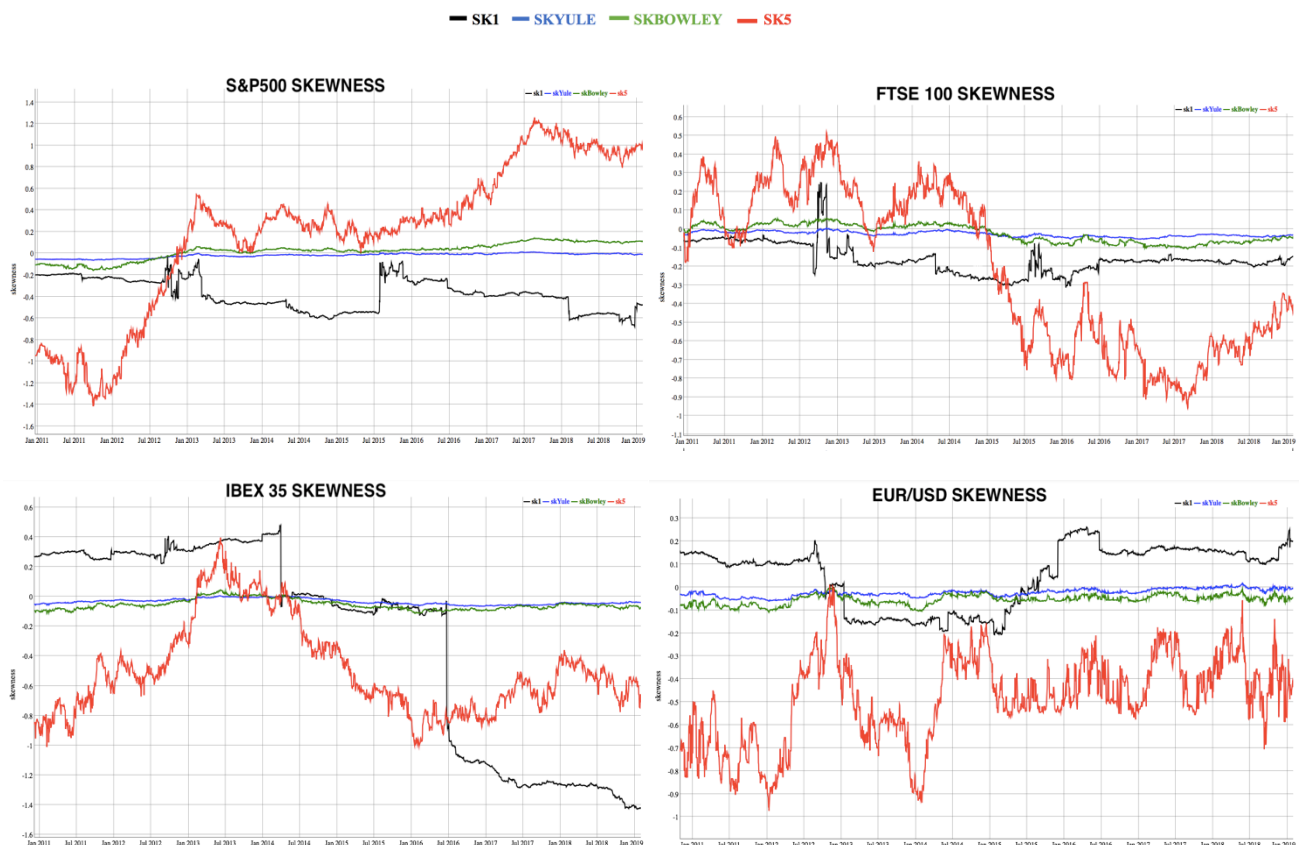
siendo f la función de densidad de la serie financiera que, al ser desconocida, se puede aproximar mediante un estimador Kernel.

Para estudiar la asimetría de las series financieras adecuadamente, aplicamos ventanas móviles, conocidas como ‘rolling windows’, de tamaño 1000 para observar la dinámica de la asimetría en estas series y se puede observar que la asimetría no es constante en el tiempo, sino que hay dependencia temporal y agrupamiento o ‘clustering’ en la asimetría. Los resultados de este análisis se detallan en la Tabla 8.1 del anexo. En la Figura 2.3 se visualizan los rolling de los estadísticos de asimetría estándar, de Yule, de Bowley y una estimación robusta del estadístico estándar a través del estadístico de Bowley como proponen Ghysels et al. (2016). Esta estimación robusta viene dada por:

$$\widehat{SK5} = 6 * \frac{\widehat{S}_B}{q(0.75)}$$

Figura 2.3 Rolling window de las distintas medidas de asimetría para las series financieras

Observando el estadístico de asimetría estándar (en negro) y el estadístico robusto SK5 (en rojo) se desprende que la asimetría varía a lo largo del tiempo e incluso se alternan periodos de asimetría negativa y positiva, por tanto, se pone de manifiesto la necesidad de modelos complejos que capturen no solo la dinámica de la volatilidad sino de la asimetría de las series financieras.





Fuente: Elaboración propia

Del análisis conjunto de los estadísticos y contrastes robustos de asimetría en toda la serie y mediante rolling, se concluye que hay evidencia para considerar series simétricas a un nivel de significación del 5%: el gas natural y los 3 tipos de cambio analizados, no solo el EUR/USD como indicaba el contraste de asimetría estándar³.

Una vez se han estudiado las características estadísticas de las series financieras se puede proceder a elaborar modelos que capturen la dinámica de sus momentos.

³ En la Tabla 2.1 se observa que según el estadístico estándar al 5% de significación solo era simétrica la serie EUR/USD. Este resultado difiere al utilizar los estadísticos y contrastes robustos tanto en toda la serie como en el rolling (ver Tabla 8.1).

3 Modelización de la media y varianza condicional

3.1 Estacionariedad y dependencia temporal en la media

De la visualización de los gráficos de rentabilidades diarias (Figura 8.1 del anexo) se intuye que son series estacionarias y se confirma implementando el contraste Dickey-Fuller (Tabla 8.2 del anexo), en el que se rechaza la hipótesis nula de existencia de raíces unitarias en las nueve series de rentabilidad.

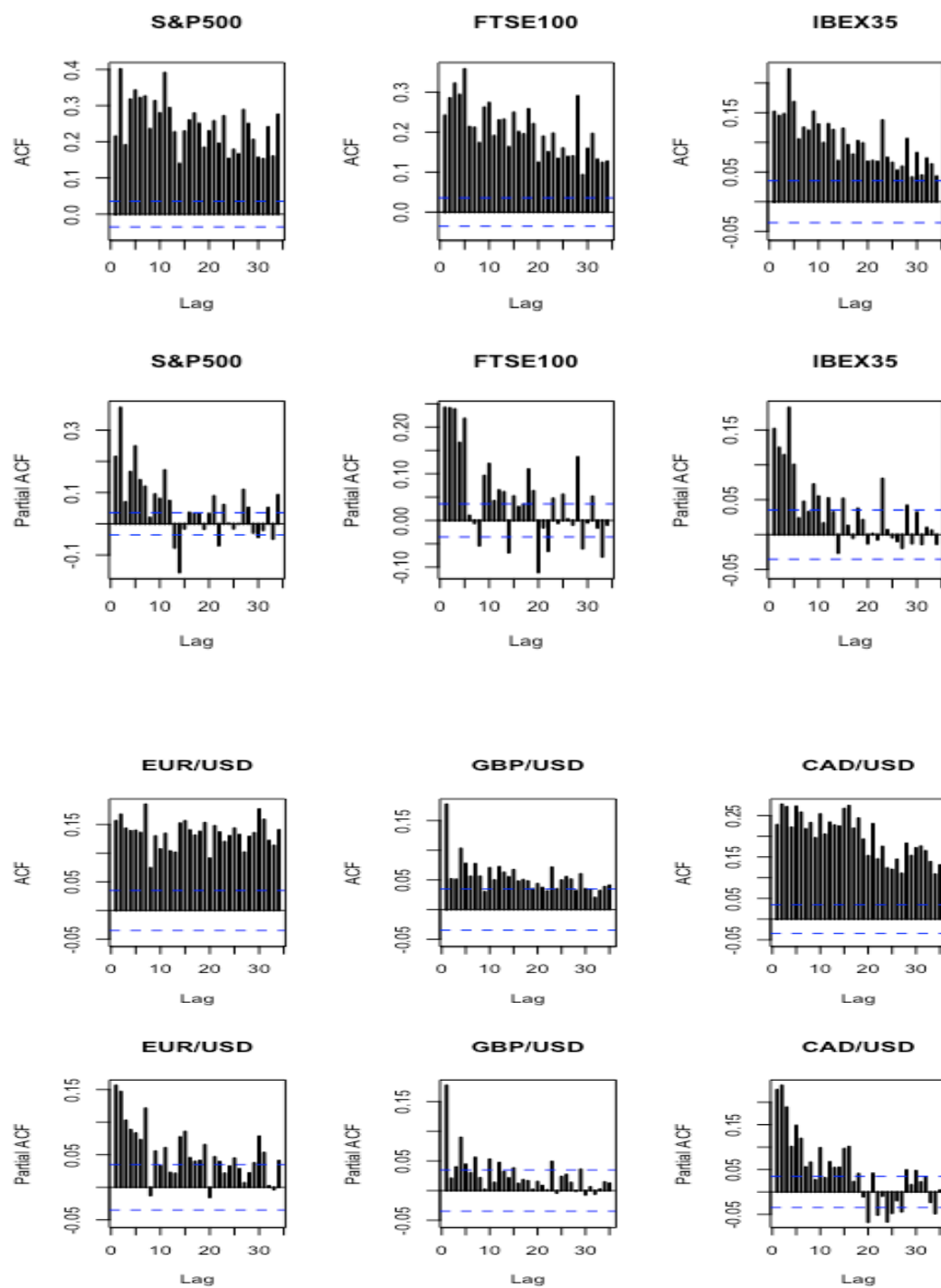
Respecto a la dependencia temporal en la media, de los gráficos de autocorrelación simple y parcial (Figura 8.2) de las series se desprende que todas excepto el EUR/USD, pueden seguir alguna estructura ARMA.

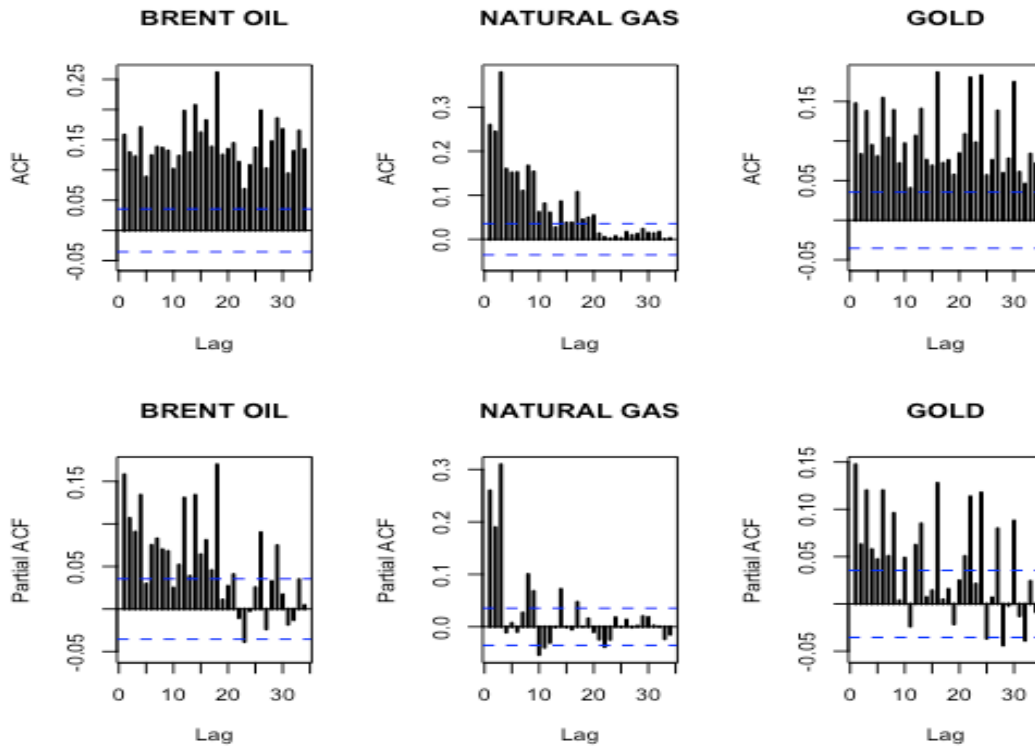
Se han identificado y estimado distintos modelos ARMA para cada serie y se ha evaluado la significatividad de los coeficientes estimados, eligiendo el mejor modelo en base al criterio de información de Akaike y comprobado que los residuos del modelo sigan un proceso no correlacionado. La estimación y resultados de los modelos ARMA se comenta en el apartado 3.3. en el que se estiman los modelos GARCH ya que para el análisis posterior se ha optado por una estimación conjunta de la media y de la varianza condicional en una sola etapa.

3.2 Estudio de la heterocedasticidad condicional

Es propio de las series financieras que su volatilidad cambie con el tiempo como se muestra en la figura 8.3 que recoge las series de rentabilidad al cuadrado como medida de la dispersión. Por otro lado, cabe señalar que la volatilidad que exhiben estas series financieras no solo cambia con el tiempo, sino que depende del mismo, al presentar clusters o agrupaciones de periodos más volátiles y mucha incertidumbre, seguidos de otros de mayor calma. La figura 3.1 muestra las funciones de autocorrelación simple y parcial de las series de rentabilidad al cuadrado, r_t^2 . Se observan coeficientes de autocorrelación positivos que decaen lentamente indicando la presencia de un proceso autorregresivo en la estructura de las series al cuadrado, es decir, siguen una estructura ARCH. Por tanto, para modelizar la dinámica de estas series es necesario estimar su varianza condicional y con ello poder hacer predicciones de la volatilidad de dichas series.

Figura 3.1. ACF y PACF de las series de rentabilidad al cuadrado: r_t^2





Fuente: Elaboración propia

Al tratarse en general de series con elevado grado de persistencia, visible en los autocorrelogramas, se analiza la varianza condicional aplicando directamente modelos GARCH en vez de ARCH para obtener una especificación de modelo más parsimoniosa.

3.3 Modelos de Varianza Condicionada

3.3.1 Modelos GARCH y variantes

Tras la propuesta de Engle (1982) de modelizar la varianza a través de procesos autorregresivos (ARCH), Bollerslev (1986) generaliza estos procesos haciéndolos depender no solo del impacto de shocks pasados, ε_{t-i} , sino también del último valor de volatilidad condicional, estos son los llamados GARCH. De modo que se tiene:

- Una ecuación que describe la dinámica de la media condicional, modelizada a través de estructuras ARMA, con un término de error heterocedástico:

$$r_t = \mu_{t|t-1} + \varepsilon_t \text{ donde } \varepsilon_t = \sigma_{t|t-1} Z_t$$

- Una ecuación que describe la varianza condicional:

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1|t-2}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q|t-q-1}^2$$

A partir de estos modelos iniciales han surgido muchas extensiones de los mismos que tratan de dar una respuesta más realista al comportamiento de las series financieras. Por ejemplo, a través de modelos que tienen en cuenta el efecto apalancamiento o *'leverage effect'* por el cual la respuesta del modelo a los shocks deja de ser simétrica ya que generalmente el impacto de los shocks negativos sobre la volatilidad es mayor que el impacto de shocks positivos. Dos de estos modelos son el TGARCH y el EGARCH desarrollados por Zakoian (1994) y Nelson (1991).

Para un TGARCH(1,1) la varianza condicional viene descrita por:

$$\sigma_{t|t-1} = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1} + \beta \sigma_{t-1|t-2} + \gamma \varepsilon_{t-1} I_{t-1} \quad \text{donde } I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es decir, los shocks positivos tienen un impacto de α mientras que los negativos tienen un impacto de $\alpha + \gamma$. Si $\gamma=0$ no hay efectos asimétricos, pero si $\gamma>0$ ocurre el *'leverage effect'*.

Para un EGARCH(1,1) la varianza condicional viene descrita por:

$$\ln(\sigma_{t|t-1}^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1|t-2}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1|t-2}^2}} + \alpha \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1|t-2}^2}} - E|\varepsilon_{t-1}| \right]$$

En este modelo el *'leverage effect'* es exponencial, no cuadrático, y si $\gamma < 0$ es cuando los shocks negativos tienen un mayor impacto en la volatilidad que los positivos.

3.3.2 Distribución del término de error

Un aspecto importante a la hora de modelizar la varianza condicional para posteriores predicciones o cálculo de riesgos, es conocer como se distribuye el término de error o innovación.

Primero se estimarán los modelos con errores normales para tener un primer punto de partida, pero dado el exceso de curtosis propio de las series financieras se espera una mejor predicción utilizando errores t de student que tengan en cuenta un mayor grosor de las colas.

Por otro lado, bajo el análisis de asimetría realizado en el apartado 2.2 se espera que, en las series asimétricas, estas son los tres índices bursátiles y las materias primas: petróleo y oro, se ajuste mejor el modelo GARCH bajo errores asimétricos; mientras que en los tipos de cambio y gas natural, en principio no sería necesaria una distribución asimétrica de los errores.

3.3.3 Estimación de la media y varianza condicional

Una vez definidos los modelos a utilizar, en la Tabla 8.3 del anexo se presentan los coeficientes estimados para modelizar tanto la media condicional, mediante estructuras ARMA, como la varianza condicional para cada serie bajo una estructura GARCH(1,1), TGARCH(1,1) y EGARCH (1,1), y distintas distribuciones del término de error (normal, t de student y t de student asimétrica), en total se han estimado 9 modelos preliminares para cada serie.

De la estimación de los 81 modelos se desprende que:

- Excepto el gas natural y oro, todas las series presentan *leverage effect* ya que el coeficiente “gamma” es significativo y, por tanto, en estas series se escogen modelos TGARCH y EGARCH para la modelización de la varianza condicional.
- Todas las series presentan un coeficiente “ni” significativo, que indica que el término de error se distribuye como una t de student en vez de una normal.
- La significatividad del coeficiente “lambda”, que indica una distribución asimétrica del término de error, se corresponde con el análisis de asimetría robusto. Tenemos que dicho coeficiente es significativo al 1% en los tres índices bursátiles, en el petróleo y en el oro (mismo resultado de asimetría que con los estadísticos robustos). Al 5% también es significativo para el tipo de cambio libra/dólar, por lo que esta serie se analizará con errores simétricos y asimétricos.

De los 81 modelos, se han elegido 18 de los modelos para el posterior análisis, en función de la significatividad de los coeficientes estimados de *leverage effect* (gamma) y de la distribución de los errores (ni y lambda).

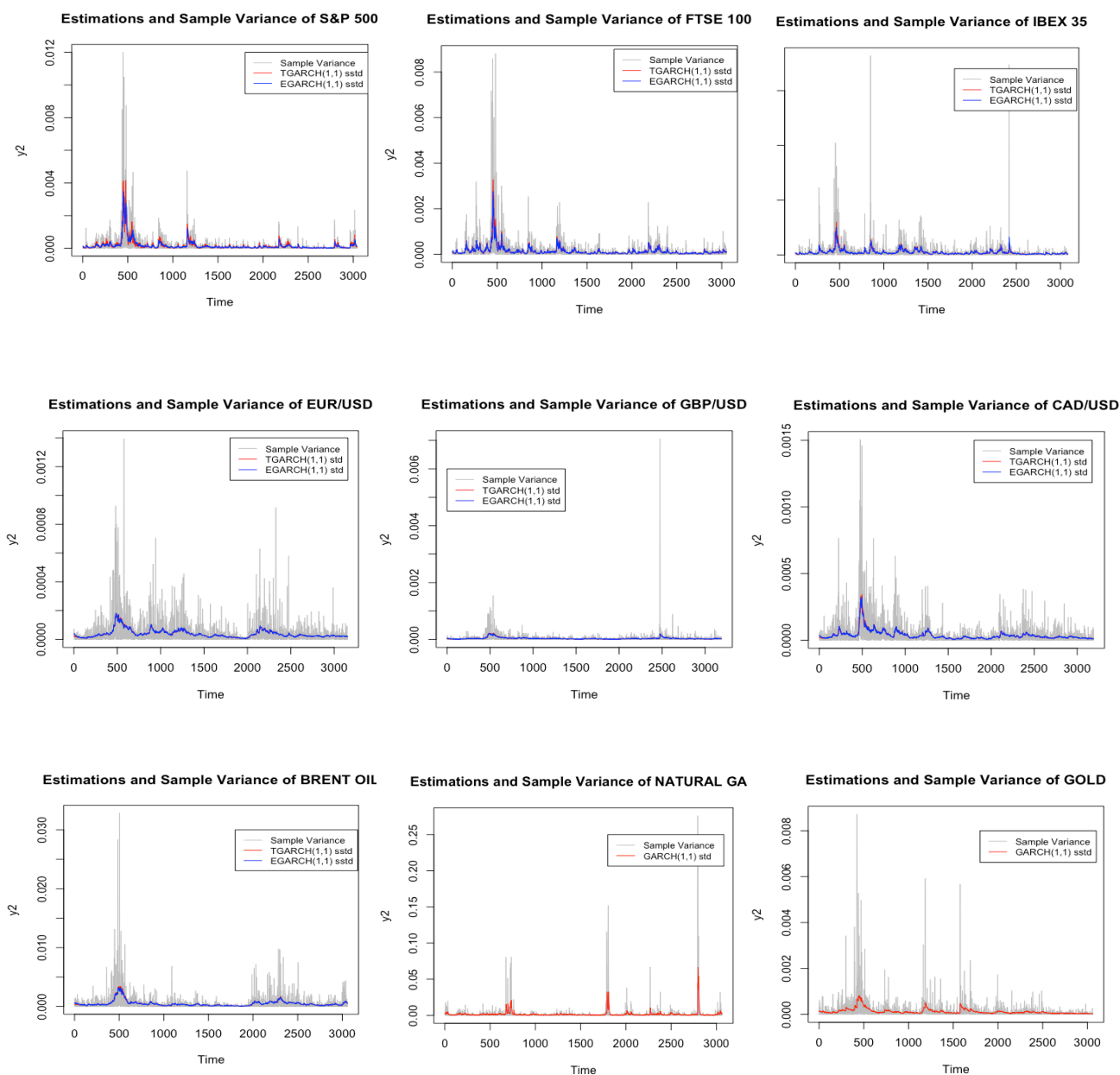
Respecto a la estructura ARMA, hay que modificar algún modelo como es el caso del IBEX 35 y el FTSE 100 ya que cambia la significatividad de los coeficientes AR y MA al hacer el análisis ARMA-GARCH conjunto en vez de hacerlo en dos etapas.

3.3.4 Evaluación de los modelos

De esos 18 modelos se ha escogido únicamente el que mejor explica la varianza de cada serie financiera. Para ello, en la figura 3.2 se ha comparado los gráficos de la serie al cuadrado y las estimaciones de varianza condicional y como son muy similares las estimaciones entre modelos, se ha realizado un test de correlación entre los modelos

tentativos de cada serie y la serie de rentabilidad menos su media al cuadrado, $(r_t - \mu)^2$, como medida de la dispersión.

Figura 3.2 Estimaciones de la varianza condicional



Fuente: Elaboración propia

Tras la elección del modelo que mejor estimación hace de la varianza condicional, los modelos definitivos se recogen en la tabla 3.1 dónde también se observa el test Ljung-Box de autocorrelación para los residuos estandarizados y para los residuos al cuadrado

estandarizados de dichos modelos. El mismo resultado de estos test se puede observar gráficamente a través de las funciones de autocorrelación simple y parcial de los residuos estandarizados y de los residuos al cuadrado estandarizados que se muestran en la Figura 8.4 del anexo.

Tabla 3.1 Modelos familia GARCH definitivos

S&P 500 ARMA(2,3)-TGARCH (1,1) with Skewed t student error distribution												
	mu	phi1	phi2	theta1	theta2	theta3	omega	alpha	beta	gamma	ni	lambda
Estimate	0.000228	-0.608763	-0.979971	0.535918	0.935762	-0.064295	0.000264	0.106282	0.896307	0.999999	6.105108	-0.162647
Std. Error	0.000100	0.012847	0.003050	0.017072	0.000245	0.002120	0.000040	0.010993	0.009682	0.103861	0.020931	0.705626
P-value	0.022778	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Log-Likelihood	10094.4											
Akaike Info Criteria	-6.6310											
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value							
	Lag[1]			0.2351	0.6278							
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][14]			5.9849	0.9966							
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][24]			12.1073	0.5315							
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value							
	Lag[1]			2.186	0.1392							
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			2.567	0.4918							
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			2.868	0.7805							

FTSE 100 ARMA(0,0)-EGARCH (1,1) with Skewed t student error distribution

	omega	alpha	beta	gamma	ni	lambda
Estimate	-0.195148	0.142301	0.978940	-0.144649	9.682197	-0.12416
Std. Error	0.003291	0.009898	0.000065	0.009012	1.628222	0.022267
P-value	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Log-Likelihood	9.932.575					
Akaike Info Criteria	-6.5000					
Ljung-Box Test en residuos estandarizados			statistic	p-value		
	Lag[1]		0.07441	0.7850		
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]		0.77256	0.5783		
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]		1.43905	0.7549		
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados			statistic	p-value		
	Lag[1]		0.9268	0.3357		
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]		2.4498	0.5166		
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]		3.5054	0.6734		

IBEX 35 ARMA(1,1)-TGARCH (1,1) with Skewed t student error distribution

	mu	phi1	theta1	omega	alpha	beta	gamma	ni	lambda
Estimate	-0.000368	-0.458096	0.477327	0.000267	0.066346	0.931026	1.000000	8.073652	-0.095828
Std. Error	0.000208	0.066735	0.066013	0.000063	0.010653	0.011105	0.136335	1.087237	0.022605
P-value	0.077015	0.000000	0.000000	0.000021	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Log-Likelihood	9.077.817								
Akaike Info Criteria	-5.8812								
Ljung-Box Test en residuos estandarizados			statistic	p-value					
	Lag[1]		0.210	0.6468					
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]		1.308	0.9996					
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]		3.042	0.8842					
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados			statistic	p-value					
	Lag[1]		1.228	0.2678					
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]		3.002	0.4067					
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]		4.562	0.4964					

EUR/USD ARMA(0,0)-EGARCH (1,1) with t student error distribution

	omega	alpha	beta	gamma	ni
Estimate	-0.041635	0.080936	0.995976	-0.020623	9.427275
Std. Error	0.000901	0.005706	0.000075	0.006810	0.912980
P-value	0.000000	0.000000	0.000000	0.002459	0.000000
Log-Likelihood	11921.1				
Akaike Info Criteria	-7.5555				
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value
	Lag[1]			0.4865	0.4855
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]			0.7862	0.5731
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]			1.8303	0.6590
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value
	Lag[1]			0.2745	0.6003
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			2.2832	0.5532
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			2.9966	0.7595

GBP ARMA(1,1)-TGARCH (1,1) with t student error distribution

	mu	phi1	theta1	omega	alpha	beta	gamma	ni
Estimate	-0.000048	-0.938645	0.930818	0.000029	0.036906	0.966562	0.418199	7.858147
Std. Error	0.000082	0.009846	0.012090	0.000008	0.002561	0.001270	0.114209	1.004628
P-value	0.556123	0.000000	0.000000	0.000682	0.000000	0.000000	0.000251	0.000000
Log-Likelihood	12178.89							
Akaike Info Criteria	-7.6330							
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value			
	Lag[1]			0.1004	0.7514			
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			0.8304	1.0000			
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			1.5882	0.9959			
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value			
	Lag[1]			2.72	0.09908			
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			15.70	0.04519			
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			17.97	0.23653			

CAD/USD ARMA(1,1)-TGARCH (1,1) with t student error distribution

	mu	phi1	theta1	omega	alpha	beta	gamma	ni
Estimate	-0.000038	-0.829302	0.804781	-0.074467	0.110734	0.992836	-0.018273	10.486421
Std. Error	0.000083	0.170228	0.180514	0.002005	0.010794	0.000284	0.008306	1.740862
P-value	0.650343	0.000001	0.000008	0.000000	0.000000	0.000000	0.027814	0.000000
Log-Likelihood	12174.43							
Akaike Info Criteria	-7.6279							
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value			
	Lag[1]			0.02326	0.8788			
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			1.16493	0.9999			
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			3.04584	0.8836			
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value			
	Lag[1]			0.01493	0.9028			
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			2.22673	0.5659			
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			3.36350	0.6977			

BRENT OIL ARMA(0,0)-EGARCH (1,1) with Skewed t student error distribution

	omega	alpha	beta	gamma	ni	lambda
Estimate	-0.030263	0.085070	0.996042	-0.044810	8.330749	-0.057018
Std. Error	0.000984	0.003237	0.000145	0.006960	0.953707	0.022498
P-value	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Log-Likelihood	7902.279					
Akaike Info Criteria	-5.1603					
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value	
	Lag[1]			4.595	0.03207	
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]			4.802	0.04595	
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]			5.130	0.14302	
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value	
	Lag[1]			0.02375	0.8775	
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			2.89920	0.4258	
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			3.98165	0.5920	

NATURAL GAS ARMA(2,1)-GARCH (1,1) with t student error distribution

	mu	phi1	phi2	theta1	omega	alpha	beta	ni
Estimate	-0.000371	0.381182	-0.106359	-0.343382	0.000052	0.136051	0.833810	4.309244
Std. Error	0.000415	0.124765	0.018053	0.125000	0.000011	0.017180	0.017070	0.377558
P-value	0.371996	0.002249	0.000000	0.006013	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000
Log-Likelihood	6321.899							
Akaike Info Criteria	-4.1240							
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value			
	Lag[1]			0.6167	0.4323			
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][8]			2.0614	1.0000			
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14]			8.2554	0.3290			
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value			
	Lag[1]			12.98	0.0003145			
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			13.13	0.0014052			
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			14.06	0.0060029			

GOLD ARMA(0,0)-GARCH (1,1) with Skewed t student error distribution

	omega	alpha	beta	ni	lambda
Estimate	0.000056	0.052659	0.955393	5.503000	-0.039359
Std. Error	0.000020	0.003835	0.002249	0.538753	0.024166
P-value	0.004901	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Log-Likelihood	9939.506				
Akaike Info Criteria	-6.4912				
Ljung-Box Test en residuos estandarizados				statistic	p-value
	Lag[1]			4.472	0.03445
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]			4.493	0.00142
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]			5.204	0.09030
Ljung-Box Test en residuos al cuadrado estandarizados				statistic	p-value
	Lag[1]			57.06	4.23e-14
	Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]			60.05	1.11e-16
	Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]			63.98	1.11e-16

Fuente: Elaboración propia

Se observa que en el test Ljung-Box para los residuos estandarizados al cuadrado de la serie del gas natural y del oro, se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación; por

tanto, no se ha conseguido capturar toda la dinámica de la varianza a través del GARCH estimado. Sin embargo, como se desprende de comparar las funciones de autocorrelación de las series al cuadrado con las funciones de autocorrelación de los residuos al cuadrado, (Figura 8.4 del anexo) se han eliminado algunos picos de volatilidad por lo que el modelo explica algunos componentes de los datos, aunque quede estructura por explicar.

4 Value at Risk y Backtesting

4.1 Value-at-Risk bajo modelos GARCH

Una vez modelizada la media y varianza condicional de las series, se procede a dar una aplicación práctica de los resultados obtenidos dentro del área de gestión de riesgos financieros, un campo de las finanzas que se nutre de este tipo de modelos a la hora de elaborar sus estudios y que ha cobrado una gran importancia a raíz de los problemas de solvencia tanto de entidades financieras y empresas privadas como de los propios Estados soberanos.

Dentro de este campo, JP Morgan introduce el concepto de *RiskMetrics* y propone una serie de medidas de riesgo entre las que destaca el *Value at Risk*, que tras el Acuerdo de Basilea, se comienza a implementar esta metodología de cálculo de riesgos en todas las instituciones financieras.

El VaR trata de dar respuesta a cuál es la pérdida potencial que puede sufrir un activo o cartera dado un horizonte temporal y un intervalo de confianza.

Formalmente, el VaR de un activo financiero dado un intervalo de confianza de $1-\alpha$ viene dado por el valor $r_t^{VaR(\alpha)}$ tal que

$$\Pr(r_t \leq r_t^{VaR(\alpha)}) = \alpha$$

y dado que $r_t = \mu_{t|t-1} + \sigma_{t|t-1} z_t$, la variable r_t estandarizada viene dada por z_t , y dependiendo de los supuestos que se hallan hecho sobre las innovaciones o términos de error de los modelos, habrá que calcular el VaR bajo distintas distribuciones como la normal o la t-student.

Si se supone que z_t sigue una normal, el cálculo del VaR al 1% viene dado por:

$$r_t^{VaR(\alpha)} = \mu_{t|t-1} - 2.33\sigma_{t|t-1}$$

Sin embargo, si z_t sigue una t-student con v grados de libertad el VaR al 1% viene dado por:

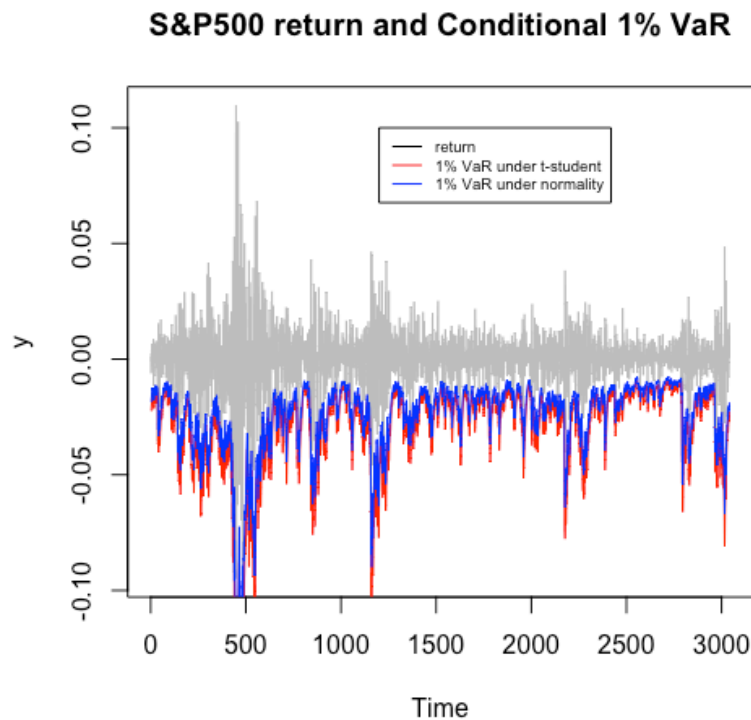
$$r_t^{VaR(\alpha)} = \mu_{t|t-1} - 2.821 \sqrt{\frac{v-2}{v}} \sigma_{t|t-1}$$

A continuación, se procede a calcular el VaR al 1% un periodo hacia adelante, para ello se utilizan las estimaciones de varianza de los modelos GARCH definitivos. Como las series financieras trabajadas presentan exceso de curtosis y consecuentemente el término de error al estimar los GARCH seguía una distribución t-student (como indicaba la significatividad del coeficiente “ni”), es de esperar que se ajuste mejor un VaR bajo t-student.

Para ver que distribución se ajusta mejor se analiza el número de veces que la rentabilidad cae por debajo del VaR calculado a un nivel de confianza concreto, estas ocasiones en las que la rentabilidad cae por debajo del VaR las llamaremos violaciones. Por ejemplo, si calculamos el VaR al 1% se espera que un 1% de las veces la rentabilidad caiga por debajo del nivel VaR.

En la figura 4.1 se observa para el S&P500 el VaR al 1% bajo normalidad y bajo la t-student con grados de libertad iguales a los estimados en el modelo de la familia GARCH por el coeficiente “ni”, en este caso 9 grados de libertad.

Figura 4.1 Comparación del VaR al 1% bajo distribución normal y t-student para el S&P500

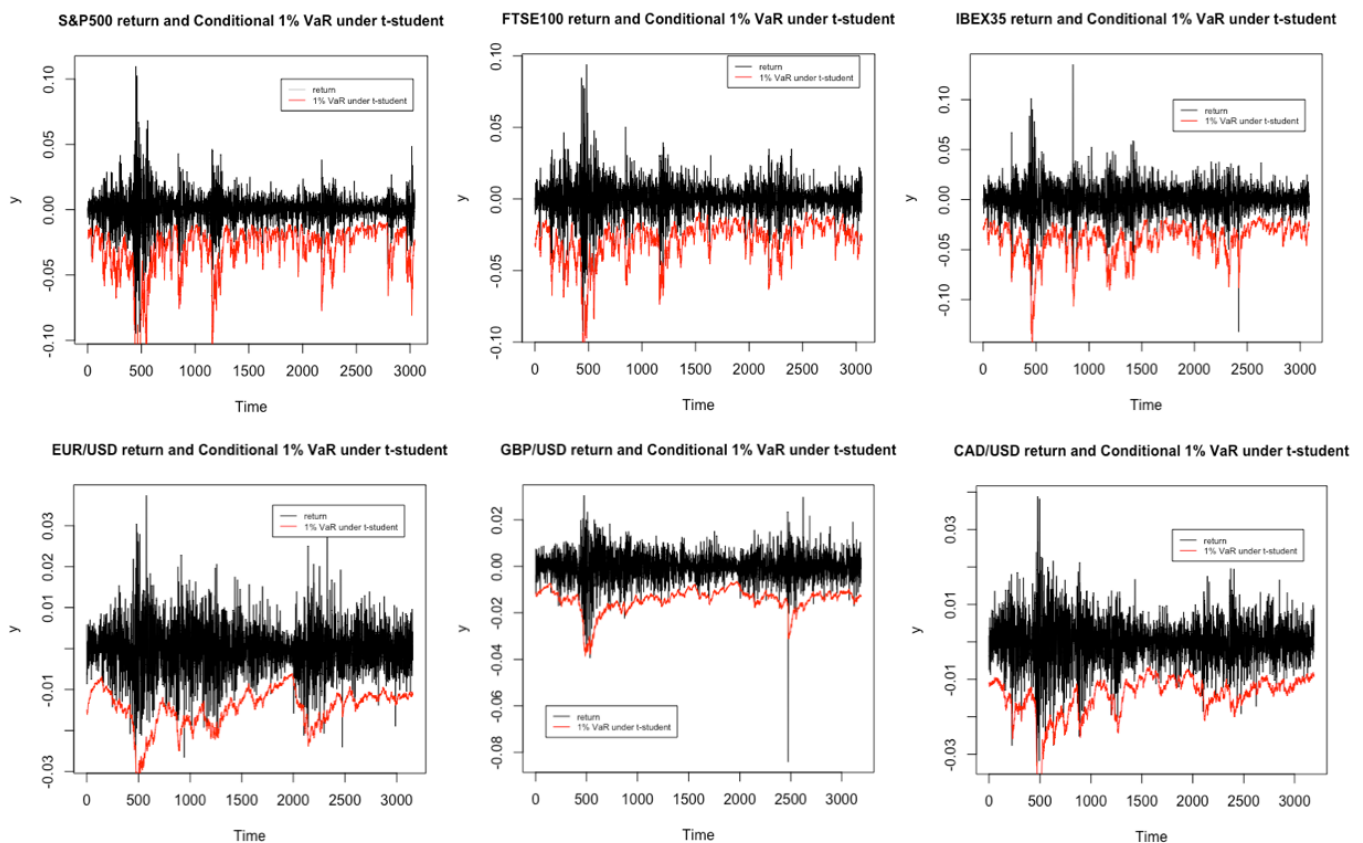


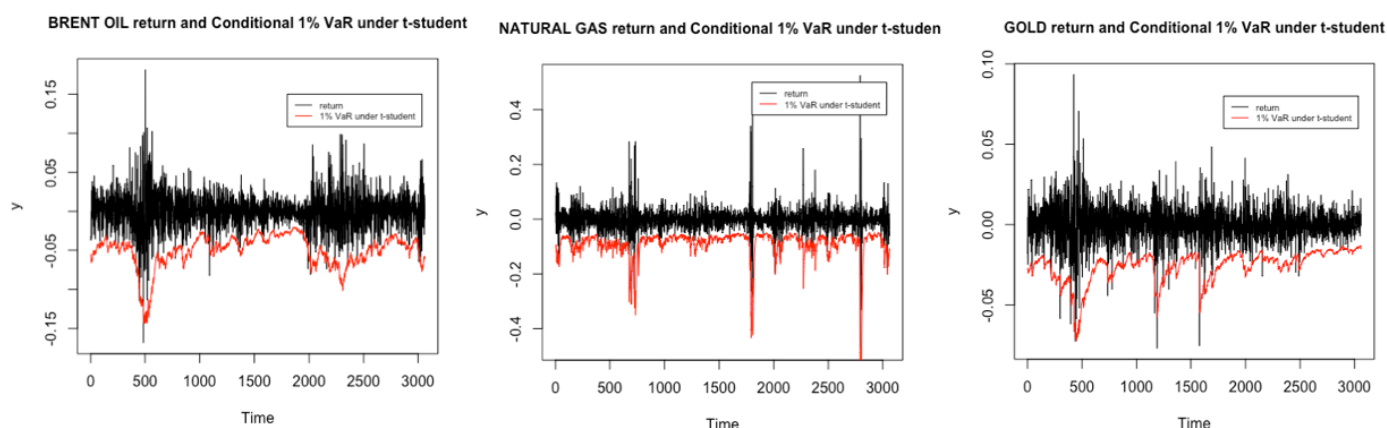
Fuente: Elaboración propia

Dado que tenemos una muestra de 3041 observaciones de rentabilidad para el S&P500, teóricamente para un VaR al 1% debe haber entre 30 y 31 violaciones. Bajo normalidad el VaR al 1% presenta un total de 67 violaciones mientras que bajo la t-student presenta 31 violaciones y por tanto es mejor utilizar una distribución t-student en este caso.

El mismo análisis se realiza para el resto de series financieras y en todas ellas el número de violaciones teórico se aproxima mejor utilizando una t-student. En la figura 4.2 se muestra el VaR bajo t-student para todas las series financieras y tomando como desviación típica condicional la estimación del modelo de la familia GARCH más adecuado para cada serie.

Figura 4.2 VaR al 1% de las series financieras bajo distribución t-student





Fuente: Elaboración propia

4.2 Backtesting

El cálculo del VaR realizado en el apartado anterior ha tomado como dato de volatilidad, la desviación típica condicional, $\sigma_{t+1|t}$, estimada mediante modelos de la familia GARCH. Sin embargo, hay procedimientos no tan complejos para hacer una estimación de la desviación típica de las series financieras que habría que comprobar que son menos eficientes que la estimación a través de los modelos GARCH en el cálculo del VaR, ya que de no ser así, se estarían implementando modelos con una complejidad innecesaria. Estos métodos más sencillos son la simulación histórica, la media móvil y la media móvil ponderada exponencialmente (EWMA).

Por tanto se procede a realizar una evaluación predictiva del VaR calculado con los GARCH y los otros tres métodos a través de una de las técnicas de Backtesting que consiste en predecir las pérdidas potenciales a través del cálculo del VaR ex ante y compararlo con el valor de rentabilidad realizada ex post para ver si el VaR infravalora o sobrevalora las pérdidas potenciales según el número de violaciones del VaR ocurridas (número de veces que la rentabilidad realizada está por debajo del valor predicho del VaR) en relación al número teórico de violaciones.

El cociente del número de violaciones observadas y número de violaciones esperadas se denomina ratio de violación y debe ser próximo a 1 si el método del cálculo de VaR utilizado es correcto. Si el ratio es mayor que 1 el método utilizada infravalora el riesgo real y si es menor que 1 lo sobrevalora.

Para realizar el backtesting y comparar estos cuatro métodos de cálculo del VaR se recurre a un rolling window prediciendo el VaR un periodo hacía adelante dentro de la

muestra y no en valores futuros ya que debido a la baja frecuencia de violaciones habría que esperar muchos períodos para contrastar la idoneidad del modelo.

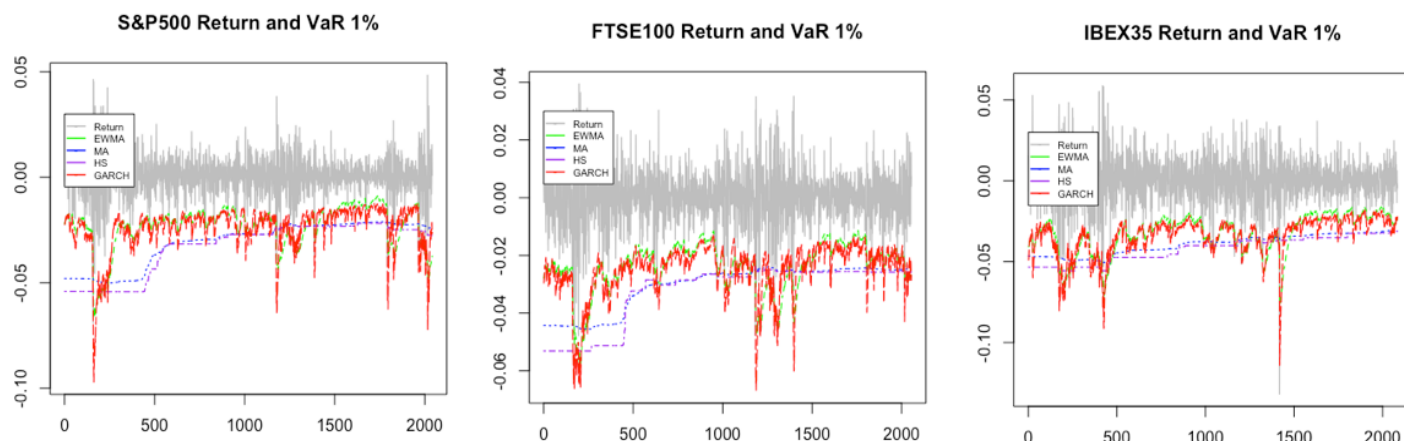
El rolling window que se realiza consiste en tomar una ventana de estimación con las 1000 primeras observaciones (aprox. 4 años) para predecir el VaR al 1% para la observación[1001], después se descarta la primera observación y construimos la ventana de estimación con las observaciones [2,1001] para predecir el VaR de la observación[1002] y así de forma recursiva.

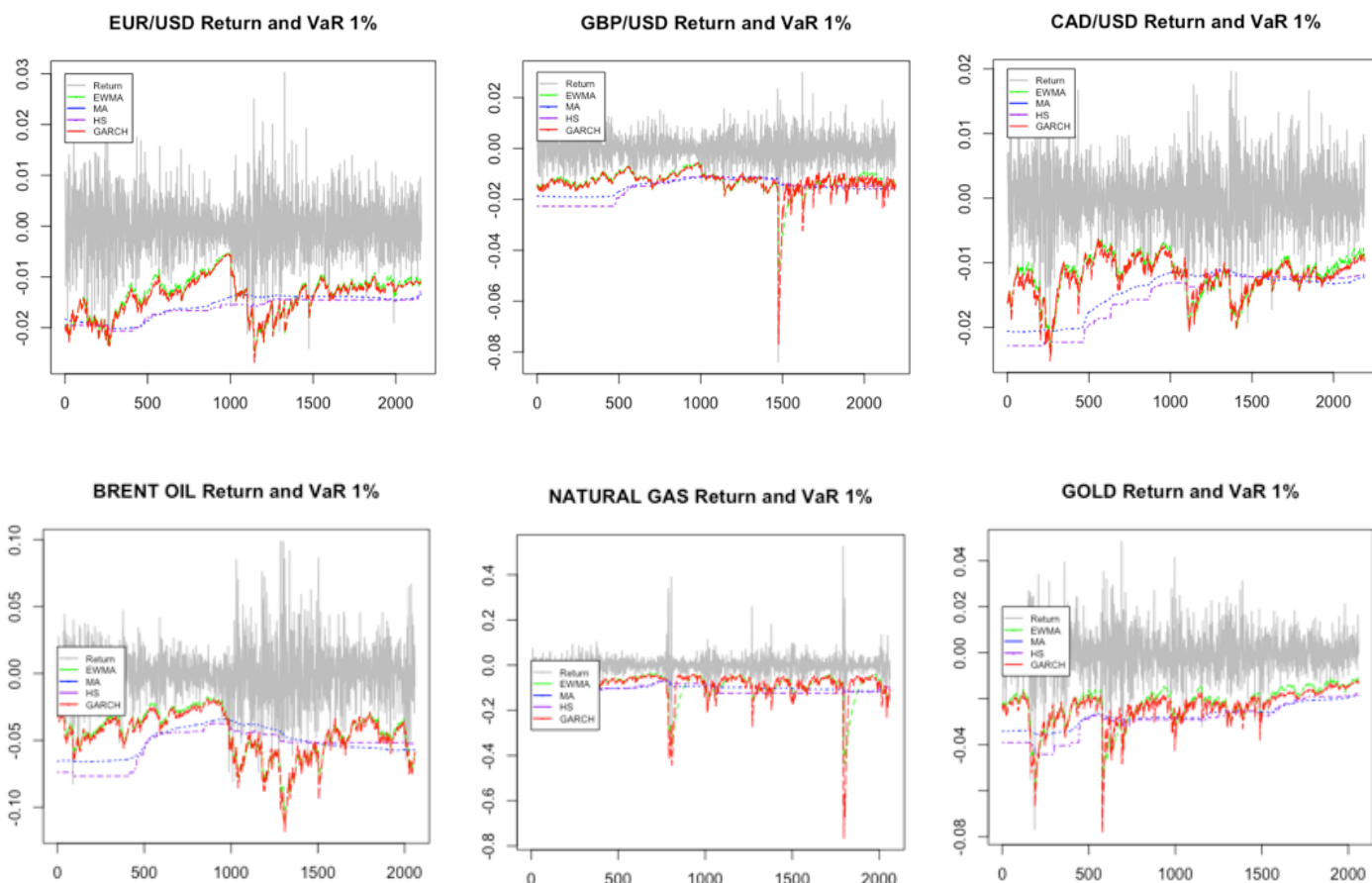
Los métodos para el cálculo del VaR que se comparan a continuación son:

- Simulación Histórica. Se ordenan las rentabilidades de menor a mayor y se elige el percentil 1%.
- Media Móvil. Se utiliza la desviación típica de la ventana para predecir el VaR del siguiente período.
- EWMA. Similar a la media móvil, pero aplicando mayor peso a las observaciones más recientes.
- GARCH. Se estima un GARCH para cada ventana y con el dato de varianza condicional estimada en cada ventana, se predice el VaR del siguiente período.

En la figura 4.3 se presenta la predicción del VaR utilizando los 4 métodos y se observa que los métodos no condicionales de simulación histórica (HS) y de media móvil (MA) capturan peor la dinámica de la serie al ser mucho menos volátiles que los métodos de media móvil ponderada exponencialmente (EWMA) y de GARCH.

Figura 4.3 VaR al 1% según métodos: HS, MA, EWMA y GARCH





Fuente: Elaboración propia

Para ver cuál de los métodos es preferible para dar una medida fiable del Value-at-Risk, en la tabla 4.1 se comparan los ratios de violación de cada método para cada serie financiera, observando que entre los dos métodos que capturan mejor la dinámica de la serie (EWMA y GARCH), el VaR mediante el GARCH tiende a predecir mejor las caídas potenciales ya que el ratio de violación utilizando este método es más cercano a uno que el ratio mediante el EWMA para todas las series excepto el FTSE100.

Por tanto, resulta de interés aplicar modelos GARCH para el cálculo de medidas de riesgo como el VaR ya que proporcionan un cálculo más fiable que los otros métodos más sencillos.

Tabla 4.1 Ratio de Violación según métodos: HS, MA, EWMA y GARCH

	SP500	FTSE100	IBEX35	EUR/USD	GBP/USD	CAD/USD	BRENT OIL	NATURAL GAS	GOLD
VR EWMA	1.518863	0.9250243	1.251631	0.8356546	1.279123	1.332877	1.504854	1.163919	1.213592
VR MA	1.028907	0.7302824	0.5758157	1.021356	0.9136592	0.7305936	1.941748	0.9699321	0.631068
VR HS	0.832925	0.5842259	0.3358925	0.4642526	0.9136592	0.5479452	1.116505	1.018429	0.5339806
VR GARCH	1.175894	0.8202824	0.8637236	0.8963788	1.1754382	0.913242	1.213592	1.066925	1.019417

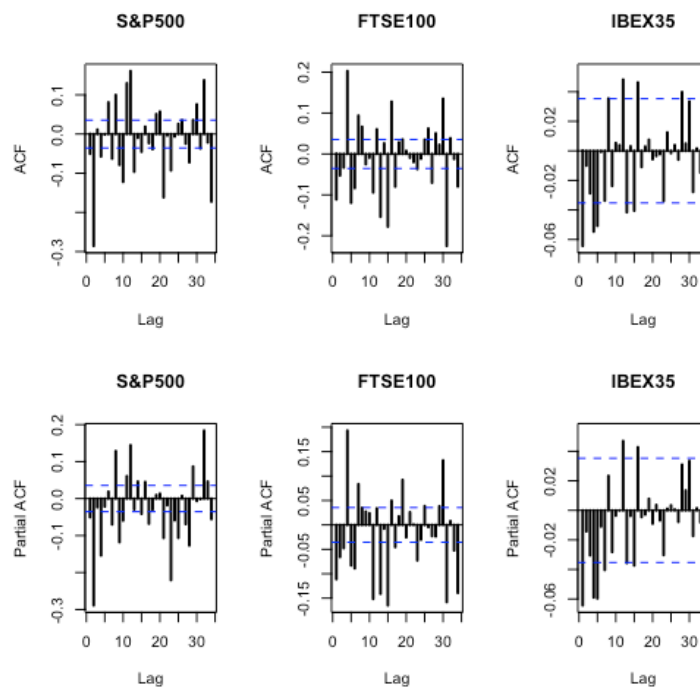
Fuente: Elaboración propia

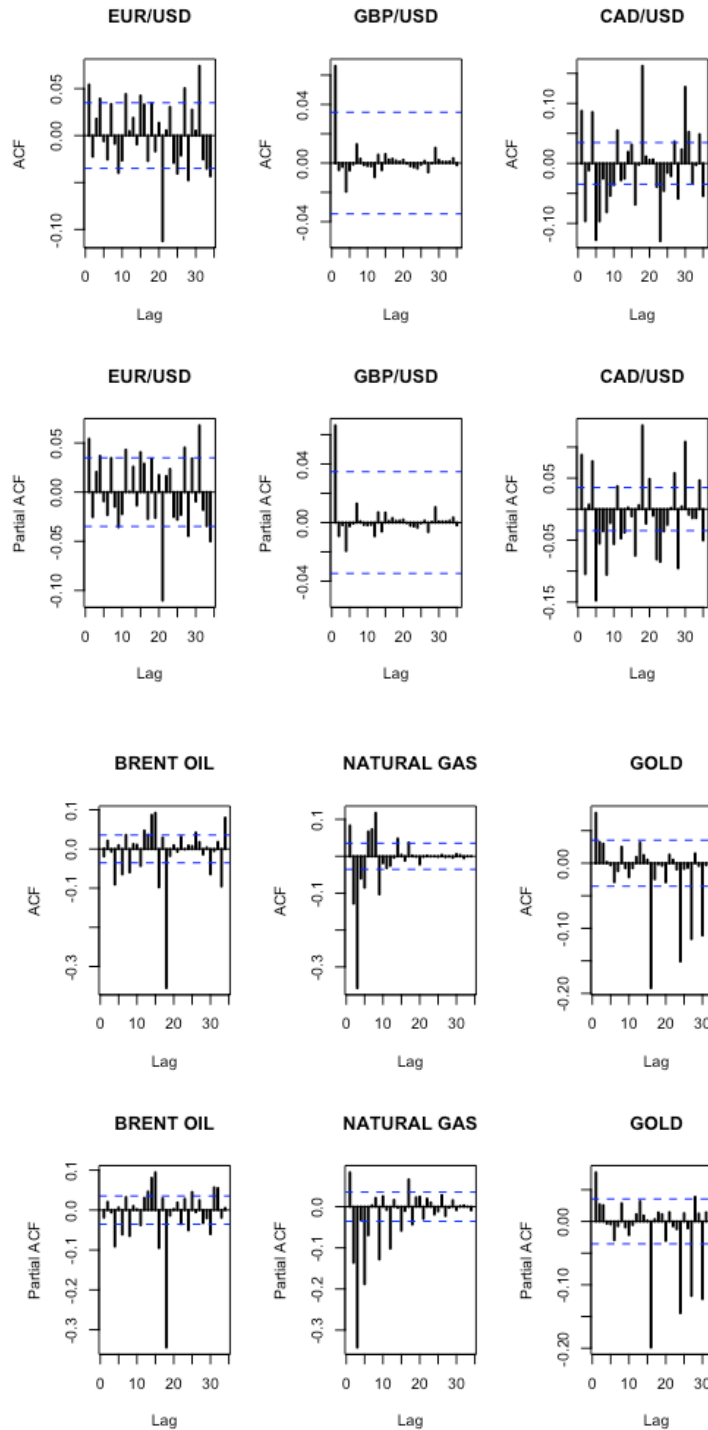
5 Estacionariedad y dependencia en la asimetría

Tras estudiar la media y varianza condicional, cabe profundizar en la modelización de estas series a través de un análisis de asimetría condicional que pueda poner de manifiesto la necesidad de estimar un proceso autorregresivo tipo GARCH no solo en la varianza sino también en la asimetría, véase Harvey and Siddique (1999).

Para ello, el mismo análisis de dependencia temporal realizado para la media y la varianza puede ser aplicado al momento de tercer orden de estas series. A través del rolling window sobre la asimetría aplicado en el apartado 2.2.3 (Figura 2.1) se observaba como la asimetría no es constante y cambia en el tiempo; y haciendo uso de los autocorrelogramas de las series de rentabilidad al cubo, r_t^3 , en la figura 5.1 se evidencia la existencia de dependencia temporal en el momento de tercer orden, y por tanto, para un análisis más exhaustivo de la estructura de estas series financieras haría falta modelizar la dinámica de la asimetría.

Figura 5.1 Correlogramas de las series de rentabilidad al cubo, r_t^3 .





Fuente: Elaboración propia

6 Conclusión

Este estudio ha pretendido realizar un análisis exhaustivo de las propiedades empíricas de series financieras de distinta naturaleza con el objetivo de elaborar modelos que estén basados en supuestos que se ajusten adecuadamente a los datos.

Para ello, dentro del análisis de estadística descriptiva, se ha profundizado en estudiar la simetría de estas series a través de estadísticos de asimetría robustos a valores atípicos y se ha apoyado, mediante la aplicación experimentos Monte Carlo, la conveniencia de estos estadísticos en lugar del estadístico estándar basado en el momento de tercer orden. Se ha observado que el uso de estos estadísticos robustos junto a sus propios contrastes arrojaba resultados diferentes que el test estándar de asimetría, dando evidencia de una naturaleza asimétrica en las series de índices bursátiles, simétrica en las de tipos de cambio y mixta en los mercados de materias primas.

Después se ha procedido a modelizar los momentos de primer y segundo orden de las series a través de modelos ARMA-GARCH incorporando hipótesis como la de *leverage effect*, comprobando que en la mayoría de las series las caídas de rentabilidad provocan generalmente un aumento de la volatilidad mayor que subidas de rentabilidad de misma magnitud y por tanto, son más correctos para modelar la heterocedasticidad condicional modelos EGARCH y TGARCH. Respecto a la distribución del término de error o innovación, se ha visto que es más adecuado utilizar una distribución t-student en vez de una normal para todas las series dado el exceso de curtosis provocado por colas gruesas propias de series de naturaleza financiera. Y se ha observado que la utilización de un error t-student asimétrico solo era significativo en las series que anteriormente habían sido catalogadas como asimétricas según los estadísticos y contrastes robustos de asimetría, concluyendo que estos estadísticos dan una mejor medición de asimetría que el estándar.

Una vez se han estimado modelos ARMA-GARCH adecuados para cada serie, se ha implementado un VaR al 1% para medir el riesgo de caídas potenciales y a través de una validación predictiva se ha visto que el VaR calculado a través del método GARCH es más eficiente que los métodos de Simulación Histórica, Media Móvil y Media Móvil Ponderada Exponencialmente, a la hora de predecir las caídas de rentabilidad.

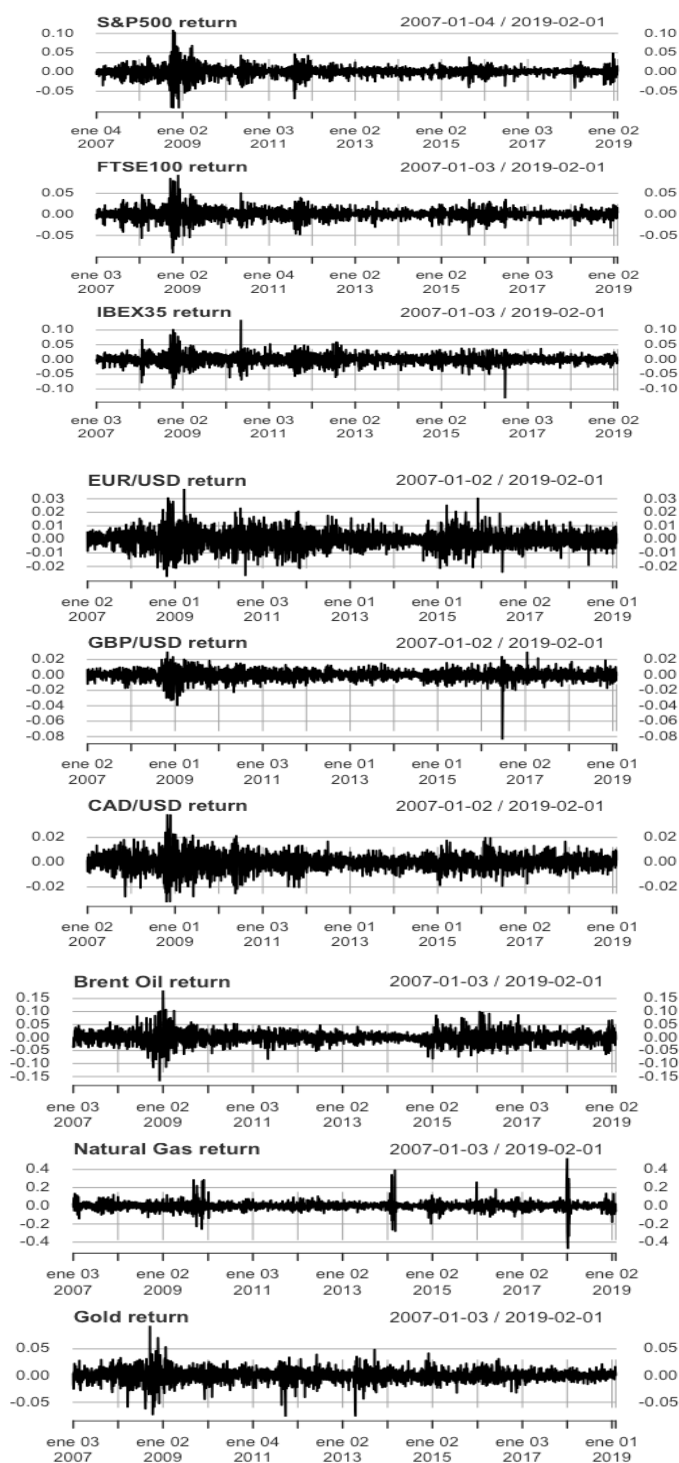
Por último, se ha mencionado la necesidad de elaborar modelos más complejos que no solo capturen la dinámica y estructura de la media y la varianza, sino de los momentos de orden superior: asimetría y curtosis, ya que se ha observado autocorrelación en las series al cubo, indicando una dependencia temporal en la asimetría que puede capturarse a través de modelos autorregresivos en varianza y asimetría condicional y probablemente sea adecuado extender este análisis a la curtosis.

7 Bibliografía

- Bonato, Matteo (2010). *Robust estimation of skewness and kurtosis in distributions with infinite higher moments*. Journal of Economic Literature.
- Bowley, A. L. (1920). *Elements of Statistics*. 4th edn. Charles Scribner's Sons.
- Danielsson, Jón (2011). *Financial Risk Forecasting*. Wiley Finance.
- Dong, H. and Swayngim, W. (2015). *Is skewness simply sufficient? Evidence from Monte Carlo simulation on asymmetric asset returns*. Journal of Finance and Investment Analysis.
- Fernandez-Perez, A., Frijns, B., Fuertes, A. and Miffre, J. (2016). *The skewness of commodity futures returns*. Journal of Banking and Finance.
- Ghysels, E., Plazzi, A. and Valkano, R. (2016). *Why Invest in Emerging Markets? The Role of Conditional Return Asymmetry*. The Journal of Finance.
- González-Rivera, Gloria (2013). *Forecasting for Economics and Business*
- Harvey, C.R. and Siddique, A. (1999). *Autoregressive Conditional Skewness*. Journal of Financial and Quantitative Analysis.
- Harvey, C.R. and Siddique, A. (2000). *Conditional Skewness in Asset Pricing Tests*. Journal of Finance.
- Kim, T. and White, H. (2003). *On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis: Simulation and Application to the S&P500 Index*. Financial Research Letters.
- León, A., Rubio, G. and Serna, G. (2004). *Autorregresive Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis*. The Quarterly Review of Economics and Finance.
- Peña, Daniel (2010). *Análisis de series temporales*. Alianza.
- Yule, G. U. (1912). *An introduction to the Theory of Statistics*. 1st edn. Charles Griffin and Co.
- Librerías R utilizadas: “quantmod”, “stats”, “zoo”, “time series”, “forecasts”, “fGarch” y “rugarch”.

8 Anexos

Figura 8.1. Rentabilidades de las series financieras



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de precio de cierre diario de Yahoo Finance para los índices bursátiles y los tipos de cambio, y datos de Quandl para las materia primas.

Tabla 8.1 Porcentaje de rechazo de la hipótesis nula de simetría en los rolling window según el contraste de asimetría para cada estadístico

ROLLING 1000	sk1	skYule	skBowley
S&P500	98,530%	20,029%	36,924%
FTSE100	76,788%	11,927%	10,949%
IBEX35	75,793%	34,724%	16,930%
EUR/USD	80,464%	0,000%	0,000%
GBP/USD	78,356%	0,000%	0,000%
CAD/USD	75,490%	0,913%	0,958%
BRENT OIL	68,753%	8,637%	20,039%
NATURAL GAS	98,546%	0,000%	9,646%
GOLD	90,490%	38,476%	11,073%

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8.2 Contrastes Dickey-Fuller aumentado

Para elegir el contraste de raíz unitaria más adecuado, se observan los gráficos de las series de rentabilidades de donde se desprende que las series no exhiben tendencia y los valores varían entorno al valor cero. Por otro lado, como algunas de las series no son ruido blanco y hay autocorrelación en los residuos se añaden retardos de la variable explicativa. Por tanto, se utiliza el contraste de Dickey-Fuller aumentado sin constante ni tendencia, regresando:

$$\Delta y_t = \mu + \phi^* y_{t-1} + \sum_{k=1}^p \alpha_k \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Y contrastando $H_0: \phi^* = 0$, si se rechaza la hipótesis nula hay evidencia de que la serie es estacionaria.

	S&P 500	FTSE 100	IBEX 35	EUR/USD	GBP/USD	CAD/USD	BRENT OIL	NATURAL GAS	GOLD
Estadístico	-11.721	-26.909	-13.285	-56.159	-26.520	-10.589	-13.527	-13.852	-52.998
P-valor	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Fuente: Elaboración propia

Figura 8.2 Autocorrelación simple y parcial de las series de rentabilidad

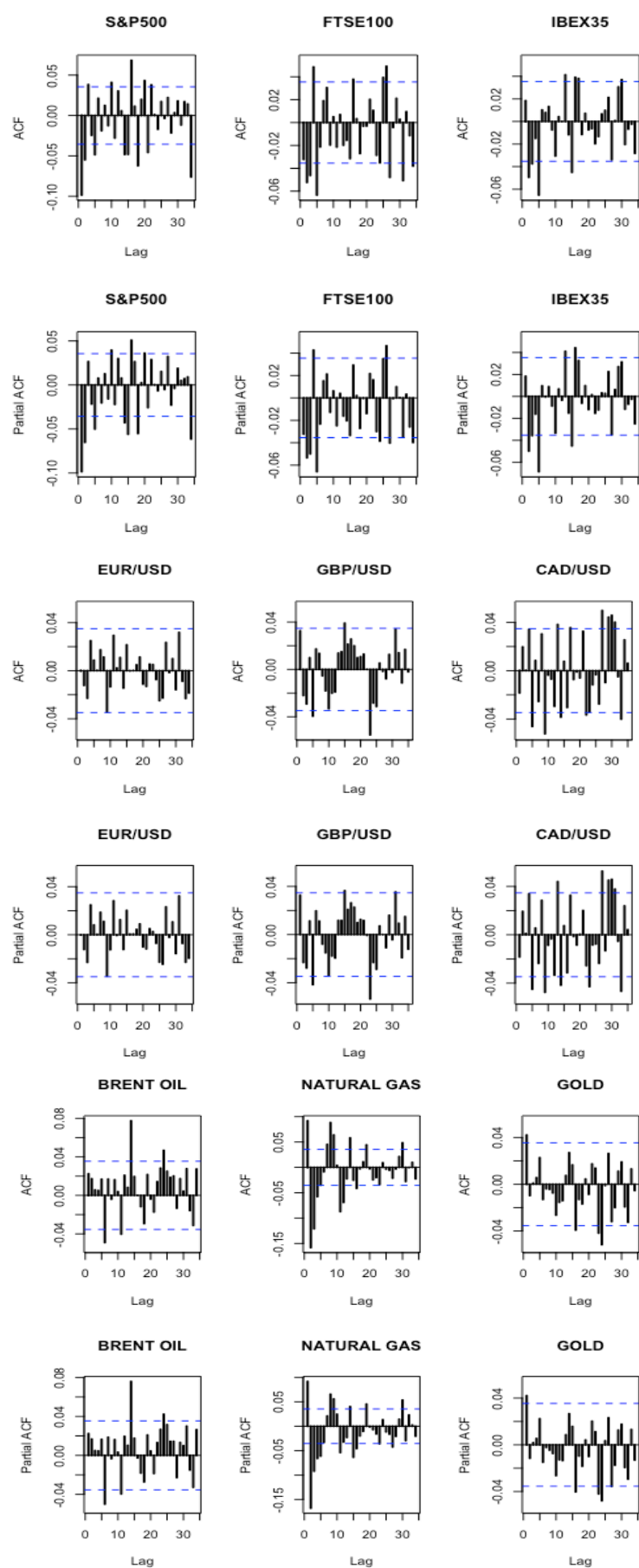
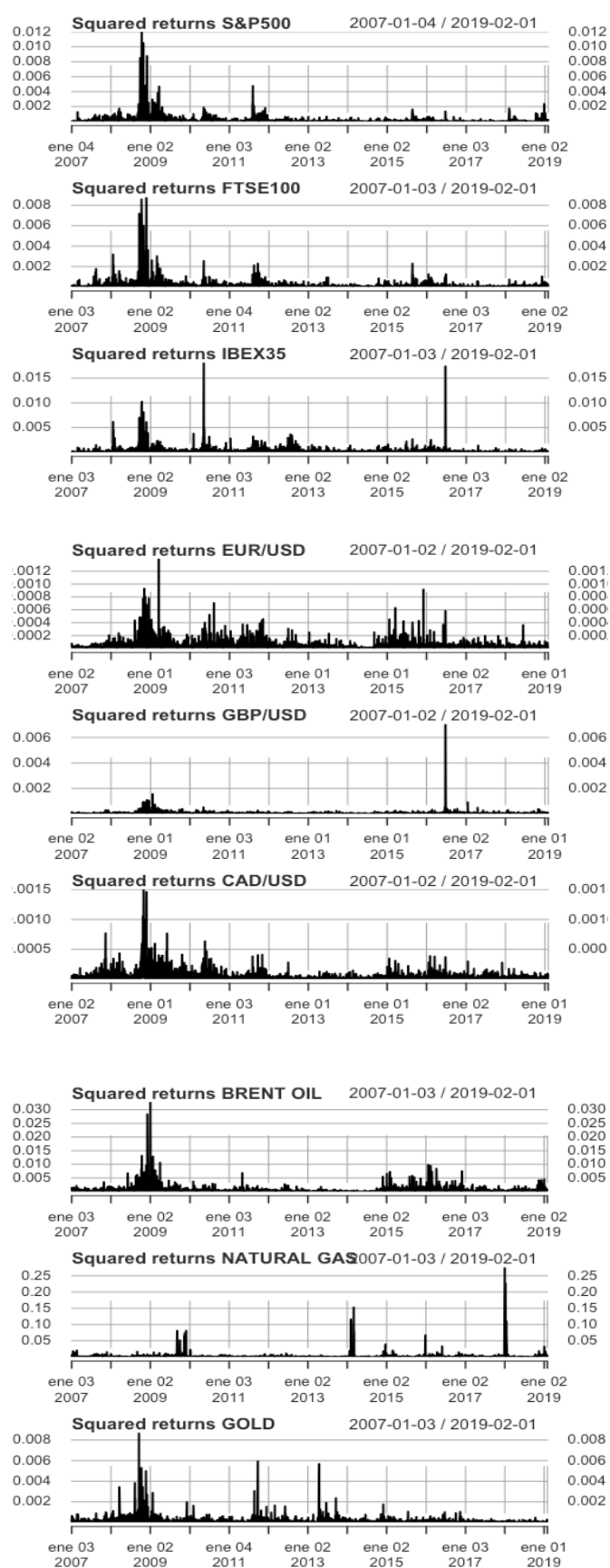


Figura 8.3 Series de rentabilidad al cuadrado: r_t^2



Fuente: Elaboración propia

Tabla 8.3 Modelos preliminares ARMA-GARCH

S&P 500		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
ARMA Structure (2,3)	mu	0.000658	0.000825	0.000578	0.000290	0.000537	0.000228	0.000365	0.000601	0.000304
	phi1	-0.622093	-0.877198	-0.875971	-0.640542	-0.621364	-0.608763	-0.627025	-0.224014	-0.176272
	phi2	-0.991872	-0.993405	-0.993688	-0.983432	-0.987403	-0.979971	-0.982893	-0.994285	-0.995893
	theta1	0.548454	0.808353	0.788888	0.575895	0.559593	0.535918	0.562457	0.159184	0.101339
	theta2	0.942488	0.930274	0.913610	0.931871	0.945779	0.935762	0.934277	0.983568	0.986928
GARCH Structure	theta3	-0.070037	-0.074880	-0.093428	-0.065589	-0.057513	-0.064295	-0.060753	-0.065811	-0.076746
	omega	0.000002	0.000001	0.000001	0.000315	0.000225	0.000264	-0.283814	-0.202398	-0.242360
	alpha	0.129573	0.129277	0.127425	0.100633	0.105212	0.106282	0.164330	0.169417	-0.181141
	beta	0.852496	0.869723	0.871575	0.892662	0.898296	0.896307	0.969223	0.979245	0.974271
error distrib	gamma				1.0000	0.999999	0.999999	-0.168205	-0.177310	0.168825
	ni		4.909266	5.286472		5.527286	6.105108		5.173734	5.801945
	lambda			-0.120472			-0.162647			-0.149745
Log- Likelihood		9885.918	9995.267	10009.87	9985.93	10068.76	10094.4	9965.609	10054.77	10082.57
Akaike Info Criteria		-6.4958	-6.5671	-6.576	-6.561	-6.6148	-6.6310	-6.5476	-6.6056	-6.6232

Los modelos en negrita son aquellos que se han elegido como preliminares para modelizar la varianza condicional debido a la significatividad de sus coeficientes GARCH y a partir del Criterio de Akaike. Los coeficientes en rojo son aquellos que no son significativos al 5%.

FTSE 100		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
ARMA Structure (1,1)	mu	0.000343	0.000393	0.000268	-0.000176	-0.000053	-0.000127	-0.000111	-0.000074	-0.000088
	phi1	0.947238	0.945089	0.921692	-0.999009	0.940257	0.256954	0.465934	0.950455	0.349036
	theta1	-0.967215	-0.964210	-0.950264	0.998478	-0.932081	-0.276852	-0.481461	-0.937348	-0.371292
	theta2									
GARCH Structure	omega	0.000002	0.000002	0.000002	0.000256	0.000226	0.000234	-0.210570	-0.171627	-0.191479
	alpha	0.118074	0.117445	0.107056	0.080963	0.086104	0.081670	0.144955	0.128767	0.142775
	beta	0.866045	0.872447	0.882992	0.913441	0.912199	0.915533	0.976906	0.981779	0.979341
	gamma				0.940039	1.000000	1.000000	-0.126188	-0.157399	-0.139074
error distrib	ni		7.594894	8.229567		9.721967	-0.127948		9.069777	9.746778
	lambda			-0.11503			10.379935			-0.128466
Log- Likelihood		9820.532	9858.752	9869.919	9901.162	9926.968	9940.475	9889.81	9920.243	9933.323
Akaike Info Criteria		-6.4273	-6.4517	-6.4584	-6.4795	-6.4957	-6.5039	-6.4720	-6.4913	-6.4992

IBEX 35		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
ARMA Structure (1,2)	mu	0.000251	0.000292	0.000094	-0.000565	-0.000263	-0.000365	-0.000295	-0.000121	-0.000337
	phi1	0.821600	0.897388	0.845114	0.967583	0.962584	-0.313283	0.591149	0.424400	0.434826
	theta1	-0.812009	-0.880342	-0.840198	-0.946483	-0.936462	0.331204	-0.576856	-0.400856	-0.419452
	theta2	-0.036679	-0.033619	-0.032698	-0.013879	-0.019301	-0.006423	-0.027948	-0.015176	-0.018628
GARCH Structure	omega	0.000004	0.000003	0.000003	0.000270	0.000239	0.000267	-0.182820	-0.161189	-0.164855
	alpha	0.107645	0.090096	0.086804	0.068748	0.067290	0.066065	0.132572	0.117497	0.119302
	beta	0.875768	0.897070	0.901031	0.929690	0.931643	0.931233	0.978321	0.981595	0.980910
	gamma				1.000000	1.000000	1.000000	-0.110418	-0.116301	-0.115396
error distrib	ni		6.838518	7.029823		8.010057	8.059913		7.707555	7.833453
	lambda			-0.098969			-0.096376			-0.096682
Log- Likelihood		8941.082	9010.451	9016.965	9007.67	9070.108	9077.583	8998.318	9061.523	9069.65
Akaike Info Criteria		-5.7938	-5.8382	-5.8417	-5.8364	-5.8762	-5.8804	-5.8303	-5.8706	-5.8753

EUR/USD		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
GARCH Structure	omega	0.000000	0.000000	0.000000	0.000024	0.000021	0.000021	-0.045370	-0.041635	-0.041057
	alpha	0.035285	0.038755	0.038214	0.033184	0.038176	0.037902	0.070283	0.080936	0.080290
	beta	0.962113	0.959799	0.960527	0.970269	0.967033	0.967337	0.995441	0.995976	0.996022
	gamma			0.966852	0.372231	0.280835	0.280653	-0.024047	-0.020623	-0.020449
	lambda			-0.033148			-0.033731			-0.033275
Log- Likelihood		11884.04	11920.15	11921.04	11893.17	11923.21	11924.16	11888.88	11921.1	11922.02
Akaike Info Criteria		-7.5333	-7.5556	-7.5555	-7.5385	-7.5569	-7.5569	-7.5358	-7.5555	-7.5555

GBP/USD		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
ARMA Structure (1,1)	mu	-0.00004	0.000001	-0.000042	-0.000077	-0.000048	-0.000100	-0.000065	-0.000045	-0.000097
	phi1	-0.26047	-0.947744	-0.943292	-0.956238	-0.938645	-0.934147	-0.233339	-0.940275	-0.936823
	theta1	0.25460	0.939707	0.934378	0.948939	0.930818	0.925699	0.236996	0.932422	0.928422
GARCH Structure	omega	0.00000	0.000000	0.000000	0.000060	0.000029	0.000028	-0.116482	-0.063068	-0.061570
	alpha	0.06213	0.042678	0.042225	0.072813	0.036906	0.035562	0.142598	0.079514	0.076977
	beta	0.93218	0.953563	0.953449	0.934399	0.966562	0.967808	0.988274	0.993983	0.994099
	gamma				0.060103	0.418199	0.446605	-0.006983	-0.027867	-0.028761
error distrib	ni		7.566482	7.667592		7.858147	7.948410		7.780177	7.859349
	lambda			-0.046575*			-0.05547*			-0.054074*
Log- Likelihood		12094.7	12166.94	12168.82	12098.47	12178.89	12181.58	12097.7	12177.7	12180.24
Akaike Info Criteria		-7.5815	-7.6262	-7.6267	-7.5832	-7.6330	-7.6341	-7.5828	-7.6323	-7.6333

* El coeficiente de asimetría en la distribución de errores es significativo al 5% pero no al 1%

CAD/USD		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
ARMA Structure (1,1)	mu	-0.000047	-0.000024	-0.00005	-0.000057	-0.000038	-0.000061	-0.000060	-0.000038	-0.000061
	phi1	-0.794223	-0.819582	-0.82105	-0.817648	-0.830068	-0.831641	-0.815994	-0.829302	-0.830820
	theta1	0.772455	0.796790	0.79723	0.796704	0.805309	0.806183	0.794873	0.804781	0.805655
GARCH Structure	omega	0.000000	0.000000	0.00000	0.000045	0.000039	0.000039	-0.083162	-0.074467	-0.074284
	alpha	0.045873	0.048255	0.04774	0.053354	0.055403	0.055244	0.105949	0.110734	0.110266
	beta	0.948155	0.949189	0.94821	0.950669	0.950276	0.950441	0.991789	0.992836	0.992842
	gamma				0.190419	0.173796	0.177623	-0.019197	-0.018273	-0.018559
error distrib	ni		10.277029	10.68032		10.605055	10.726828		10.486421	10.601445
	lambda			-0.02895			-0.029954			-0.029491
Log- Likelihood		12158.45	12177.17	12178.02	12155.69	12174.82	12175.61	12155.11	12174.43	12175.2
Akaike Info Criteria		-7.6191	-7.6302	-7.6301	-7.6167	-7.6281	-7.6280	-7.6164	-7.6279	-7.6277

BRENT OIL		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
GARCH Structure	omega	0.000001	0.000001	0.000001	0.000102	0.000074	0.000072	-0.038285	-0.031507	-0.030263
	alpha	0.048511	0.043479	0.043321	0.049393	0.044928	0.045144	0.094623	0.085057	0.085070
	beta	0.950288	0.955081	0.955487	0.957907	0.962403	0.962627	0.994661	0.995961	0.996042
	gamma			0.947337	0.541956	0.523467	0.525146	-0.050278	-0.044498	-0.044810
error distrib	ni		7.372057	7.427255		8.344263	8.378379		8.310274	8.330749
	lambda			-0.052663			-0.056687			-0.057018
Log- Likelihood		7839.503	7885.506	7888.11	7861.636	7896.597	7899.631	7864.022	7899.231	7902.279
Akaike Info Criteria		-5.1212	-5.1507	-5.1517	-5.1351	-5.1573	-5.1586	-5.1366	-5.1590	-5.1603

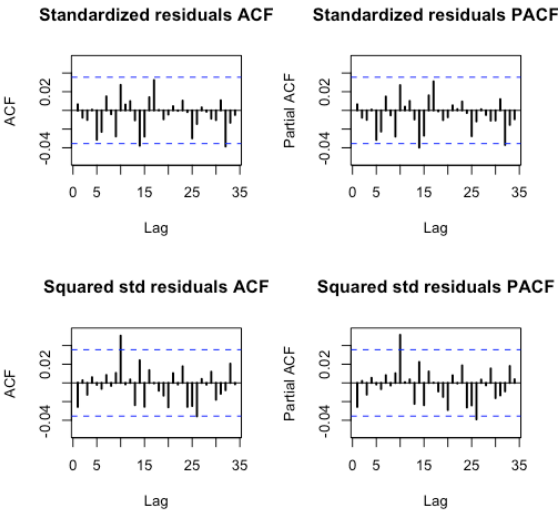
NATURAL GAS		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
ARMA Structure (2,1)	mu	-0.000221	-0.000371	-0.000449	-0.000525	-0.000558	-0.000664	-0.000422	-0.000561	-0.000675
	phi1	0.412296	0.381182	0.381263	0.432638	0.390870	0.388340	0.437339	0.388223	0.386616
	phi2	-0.110159	-0.106359	-0.105955	-0.120388	-0.106000	-0.105466	-0.120007	-0.104124	-0.103340
	theta1	-0.392307	-0.343382	-0.343498	-0.393987	-0.352700	-0.350128	-0.403138	-0.350696	-0.349277
	omega	0.000029	0.000052	0.000052	0.000793	0.001100	0.001103	-0.148415	-0.217195	-0.217622
GARCH Structure	alpha	0.143970	0.136051	0.136153	0.147702	0.127748	0.127886	0.271995	0.233606	0.233842
	beta	0.846894	0.833810	0.833651	0.872904	0.878898	0.878797	0.975262	0.967760	0.967681
	gamma				0.039382	0.090092	0.094258	-0.012251	-0.021367	-0.022343
	error distrib		4.309244	4.304205		4.175551	4.168055		4.248730	4.239901
	lambda			-0.007957		-0.010621				-0.011173
Log- Likelihood		6179.639	6321.899	6321.969	6155.84	6324.673	6324.796	6174.606	6332.365	6332.515
Akaike Info Criteria		-4.0318	-4.1240	-4.1234	-4.0156	-4.1252	-4.1246	-4.0278	-4.1302	-4.1297

GOLD		GARCH (1,1)			TGARCH (1,1)			EGARCH (1,1)		
		norm	std	skewed std	norm	std	skewed std	norm	std	skewed std
GARCH Structure	omega	0.000001	0.000000	0.000000	0.000096	0.000056	0.000055	-0.073333	-0.050835	-0.050124
	alpha	0.047289	0.039721	0.039546	0.067125	0.052256	0.052346	0.125241	0.100748	0.100888
	beta	0.947782	0.956332	0.956729	0.940629	0.955683	0.955681	0.991396	0.994535	0.994616
	gamma				0.126479	-0.079330	-0.076315	-0.014647	0.007335	0.007122
error distrib	ni		5.633675	5.647332		5.468152	5.487589		5.490457	5.506814
	lambda			-0.049799			-0.040183			-0.043012
Log- Likelihood		9840.797	9941.573	9942.879	9829.44	9938.023	9939.403	9833.331	9940.321	9941.706
Akaike Info Criteria		-6.4293	-6.4945	-6.4947	-6.4212	-6.4915	-6.4918	-6.4237	-6.4930	-6.4933

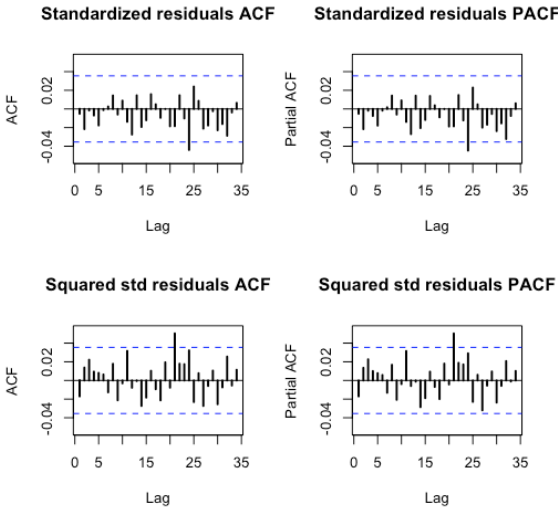
Fuente: Elaboración propia

Figura 8.4 Correlograma simple y parcial de residuos estandarizados y residuos al cuadrado estandarizados de los modelos ARMA-GARCH

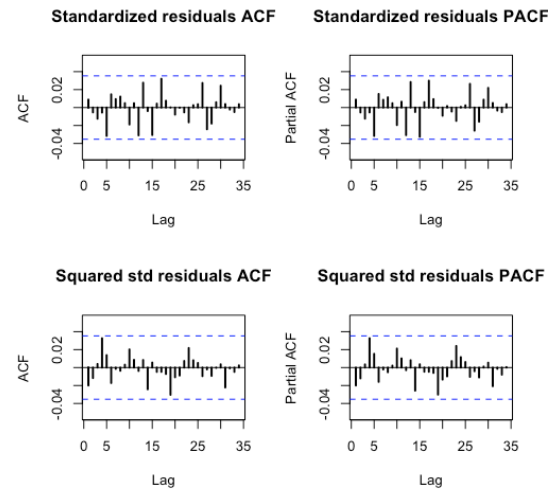
S&P 500



FTSE 100

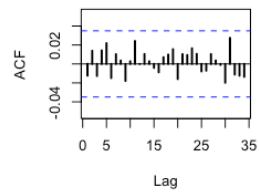


IBEX 35

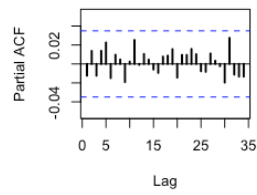


EUR/USD

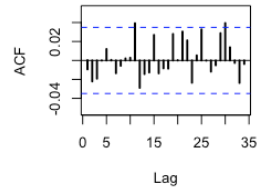
Standardized residuals ACF



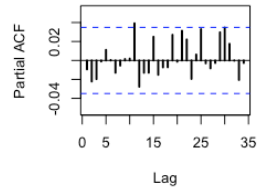
Standardized residuals PACF



Squared std residuals ACF

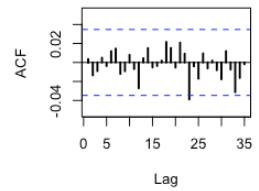


Squared std residuals PACF

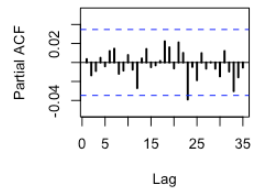


GBP/USD

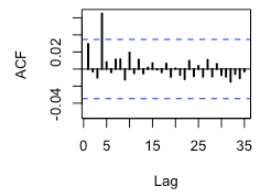
Standardized residuals ACF



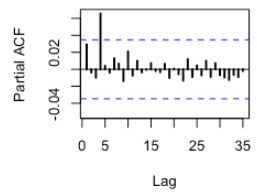
Standardized residuals PACF



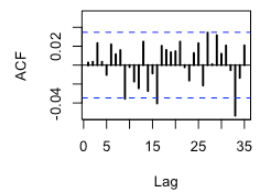
Squared std residuals ACF



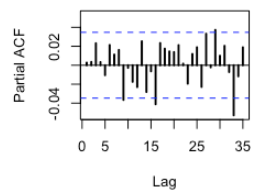
Squared std residuals PACF

**CAD/USD**

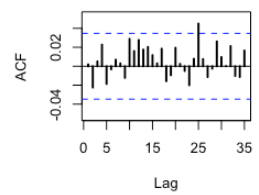
Standardized residuals ACF



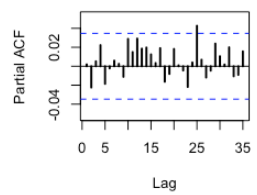
Standardized residuals PACF



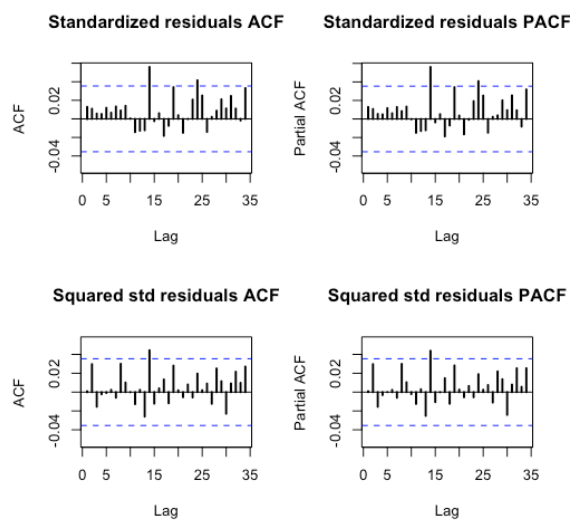
Squared std residuals ACF



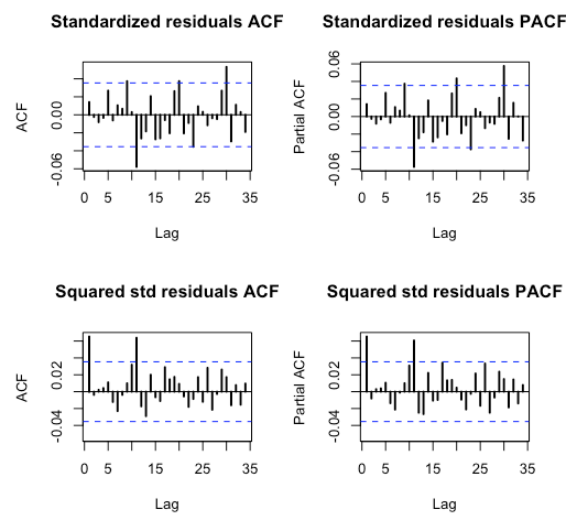
Squared std residuals PACF



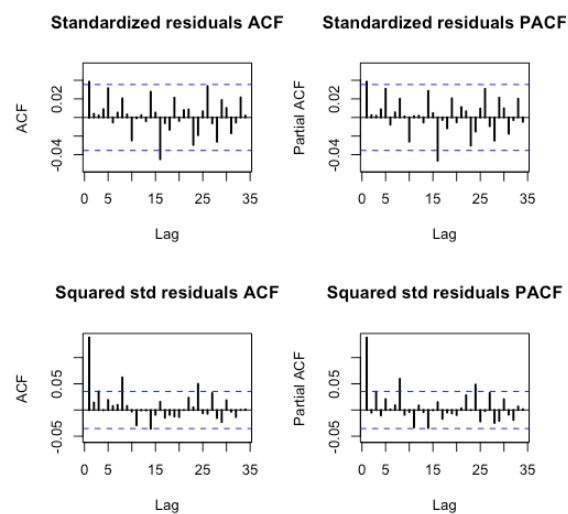
BRENT OIL



NATURAL GAS



GOLD



Fuente: Elaboración propia